

Computational Mathematics and Information Technologies

Вычислительная
математика /
Computational
Mathematics

Математическое
моделирование /
Mathematical Modelling

Информационные
технологии /
Information Technologies





Computational Mathematics and Information Technologies

Рецензируемый научно-теоретический журнал

eISSN 2587–8999

Издается с 2017 года

Периодичность — 4 выпуска в год

DOI: 10.23947/2587–8999

Учредитель и издатель — Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет» (ДГТУ), г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

Журнал «Computational Mathematics and Information Technologies» публикует обзоры, оригинальные статьи и краткие сообщения, посвященные математическому моделированию, численным методам и информационным технологиям для решения сложных и актуальных проблем науки и современной технологии. Область применения исследований — это механика сплошных сред, гидроаэродинамика, науки о Земле, химия, биология, обработка изображений и распознавание образов, теория параллельных вычислений и ее приложения, технологии больших баз данных и искусственного интеллекта и т. д.

Журнал «Computational Mathematics and Information Technologies» принимает к публикации научные и обзорные статьи в соответствии с разделами:

1. Вычислительная математика
2. Математическое моделирование
3. Информационные технологии

<i>Регистрация:</i>	Свидетельство о регистрации средства массовой информации ЭЛ № ФС 77 – 66529 от 21 июля 2016 г., выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций
<i>Индексация и архивация:</i>	РИНЦ, CrossRef, CyberLeninka
<i>Сайт:</i>	https://cmit-journal.ru
<i>Адрес редакции:</i>	344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1
<i>E-mail:</i>	CMIT-EJ@yandex.ru
<i>Телефон:</i>	+7 (863) 273–85–14
<i>Дата выхода</i> <i>№ 1, 2026 в свет:</i>	30.03.2026





Computational Mathematics and Information Technologies

Peer-reviewed scientific and theoretical journal

eISSN 2587–8999

Published since 2017

Periodicity — 4 issues per year

DOI: 10.23947/2587–8999

Founder and Publisher — Don State Technical University (DSTU), Rostov-on-Don, Russian Federation

The journal “Computational Mathematics and Information Technologies” publishes reviews, original articles and short reports on mathematical modeling, numerical methods and information technologies for solving complex and topical problems of science and modern technology. Research areas include continuum mechanics, fluid dynamics, Earth sciences, chemistry, biology, image processing and pattern recognition, parallel computing theory and its applications, big database and artificial intelligence technologies, etc.

The journal “Computational Mathematics and Information Technologies” accepts scientific and review articles for publication in accordance with the sections:

1. Computational Mathematics
2. Mathematical Modelling
3. Information Technologies

Registration: Mass media registration certificate ЭЛ № ФС 77–66529 dated July 21, 2016 issued by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media

Indexing and Archiving: RISC, Crossref, Cyberleninka

Website: <https://cmit-journal.ru>

Address of the Editorial Office: 1, Gagarin sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation

E-mail: CMIT-EJ@yandex.ru

Telephone: +7 (863) 273–85–14

Date of publication 30.03.2026

No. 1, 2026:



Редакционная коллегия

Главный редактор, Сухинов Александр Иванович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Донской государственной технической университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [MathSciNet](#), [SPIN-код](#), [ORCID](#), sukhinov@gmail.com, spu-40.4@donstu.ru

Заместитель главного редактора, Якобовский Михаил Владимирович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Российская Федерация), [ScopusID](#), [SPIN-код](#), [ORCID](#)

Ответственный секретарь, Петров Александр Пхоун Чжо, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (Москва, Российская Федерация), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [SPIN-код](#), [ORCID](#), [ИСТИНА](#)

Алексеевко Елена В., кандидат физико-математических наук, PhD, профессор, Университет Литораль Кот д'Опаль, (Булонь-сюр-Мер, Франция), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [ORCID](#)

Воеводин Владимир Валентинович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (Москва, Российская Федерация), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [SPIN-код](#), [ORCID](#)

Гасилов Владимир Анатольевич, доктор физико-математических наук, профессор, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Российская Федерация), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [SPIN-код](#), [ORCID](#)

Гущин Валентин Анатольевич, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Институт автоматизации проектирования РАН (Москва, Российская Федерация), [ScopusID](#), [SPIN-код](#), [ORCID](#)

Зиканов Олег Юрьевич, кандидат физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, Университет штата Мичиган-Дирборн (Дирборн, Соединенные Штаты Америки), [ORCID](#), [SPIN-код](#)

Лазарева Галина Геннадьевна, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор РАН, Российский университет дружбы народов (Москва, Российская Федерация), [ScopusID](#), [SPIN-код](#), [ORCID](#)

Петров Игорь Борисович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Московский физико-технический институт (государственный университет) (Москва, Российская Федерация), [ScopusID](#), [SPIN-код](#)

Поляков Сергей Владимирович, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Российская Федерация), [ScopusID](#), [SPIN-код](#), [ORCID](#)

Семенов Алексей Львович, доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН, академик РАО, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (Москва, Российская Федерация), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [SPIN-код](#), [ORCID](#)

Тишкин Владимир Федорович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Российская Федерация), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [SPIN-код](#)

Четверушкин Борис Николаевич, академик РАН, доктор физико-математических наук, профессор, научный руководитель Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Российская Федерация), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [SPIN-код](#), [ORCID](#)

Чехонин Константин Александрович, доктор физико-математических наук, доцент, зам. директора Института прикладной математики ДВО РАН, руководитель (директор) Хабаровского отделения ИПМ ДВО РАН (Хабаровск, Российская Федерация), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [SPIN-код](#), [ORCID](#)

Чистяков Александр Евгеньевич, доктор физико-математических наук, профессор, Донской государственной технической университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [SPIN-код](#), [ORCID](#)

Шамолин Максим Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (Москва, Российская Федерация), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [SPIN-код](#), [ORCID](#)

Шананин Александр Алексеевич, академик РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Московский физико-технический институт (государственный университет) (Москва, Российская Федерация), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [SPIN-код](#), [ORCID](#)

Эфендиев Ялчин, PhD, профессор, Техасский университет А&М (Колледж-Стейшен, Соединенные Штаты Америки), [ORCID](#), [ScopusID](#), [ResearcherID](#)

Editorial Board

Editor-in-Chief, Alexander I. Sukhinov, Corresponding member of RAS, Dr.Sci. (Phys. & Math.), Professor, Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russian Federation), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [MathSciNet](#), [SPIN-code](#), [ORCID](#), sukhinov@gmail.com, spu-40.4@donstu.ru

Deputy Editor-in-Chief, Mikhail V. Yakobovski, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys. & Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation), [ScopusID](#), [SPIN-code](#), [ORCID](#)

Executive Secretary, Alexander P. Petrov Dr.Sci. (Phys. & Math.), Leading Research Fellow, Institute of Control Sciences RAS (Moscow, Russian Federation), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [SPIN-code](#), [ORCID](#), [Istina](#)

Elena V. Aleksenko, Cand.Sci. (Phys. & Math.), Ph.D., Professor, University of Littoral Opal Coast (Boulogne-sur-Mer, France), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [ORCID](#)

Vladimir V. Voevodin, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys. & Math.), Professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow, Russian Federation), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [ORCID](#)

Vladimir A. Gasilov, Dr.Sci. (Phys. & Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [SPIN-code](#), [ORCID](#)

Valentin A. Gushchin, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys. & Math.), Professor, Institute of Computer Aided Design, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation), [ScopusID](#), [SPIN-code](#), [ORCID](#)

Oleg Yu. Zikanov, Cand.Sci. (Phys. & Math.), Professor, Head of Department, University of Michigan-Dearborn (Dearborn, United States of America), [ORCID](#), [SPIN-code](#)

Galina G. Lazareva, Corresponding member of RAS, Dr. Sci. (Phys. & Math), Professor of RAS, RUDN University, (Moscow, Russian Federation), [ScopusID](#), [SPIN-code](#), [ORCID](#)

Igor B. Petrov, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys. & Math.), Professor, Moscow Institute of Physics and Technology (State University) (Moscow, Russian Federation), [ScopusID](#), [SPIN-code](#)

Sergey V. Polyakov, Dr.Sci. (Phys. & Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation), [ScopusID](#), [SPIN-code](#), [ORCID](#)

Alexey L. Semenov, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Academician of the Russian Academy of Education, Lomonosov Moscow State University (Moscow, Russian Federation), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [SPIN-code](#), [ORCID](#)

Vladimir F. Tishkin, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys. & Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [SPIN-code](#)

Boris N. Chetverushkin, Academician of RAS, Dr.Sci. (Phys. & Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [SPIN-code](#), [ORCID](#)

Konstantin A. Chekhonin, Dr.Sci. (Phys. & Math.), Associate Professor, Deputy Director of the Institute for Applied Mathematics, Director of the Khabarovsk Branch of the Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences (Khabarovsk, Russian Federation), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [SPIN-code](#), [ORCID](#)

Alexander E. Chistyakov, Dr.Sci. (Phys. & Math.), Professor, Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russian Federation), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [SPIN-code](#), [ORCID](#)

Maxim V. Shamolin, Dr.Sci. (Phys. & Math.), Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow, Russian Federation), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [SPIN-code](#), [ORCID](#)

Alexander A. Shanarin, Academician of RAS, Dr.Sci. (Phys. & Math.), Professor, Moscow Institute of Physics and Technology (State University) (Moscow, Russian Federation), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [SPIN-code](#), [ORCID](#)

Yalchin Efendiev, PhD, Professor of Mathematics, Texas A&M University (College Station, United States of America), [ORCID](#), [ScopusID](#), [ResearcherID](#)

Содержание

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Семантическая сегментация с оценкой неопределённости на основе модели Дирихле и анизотропной регуляризации 7
Е.Ю. Щетинин, А.А. Шевчук

Численное решение краевых задач с однородным линейным уравнением в частных производных модифицированным методом Бубнова-Галеркина на прямоугольнике 21
Н.К. Волосова, К.А. Волосов, А.К. Волосова, Н.А. Гурьева, М.И. Карлов, Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Полуэмпирическая параметризация вертикально-неоднородного турбулентного обмена в стратифицированных мелководных водоёмах на основе натуральных данных 37
С.В. Проценко, Е.А. Проценко

Аппроксимация функций нейронными сетями 50
А.В. Галабурдин

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Обнаружение разливов нефти на основе усовершенствованных LBP-нейроалгоритмов для зашумленных космических снимков 58
А.И. Сухинов, Д.А. Соломаха, В.В. Сидорякина

Геометро-комбинаторный подход к конструированию фракталов с кубической симметрией 72
Е.В. Кравченко, А.М. Пупасов-Максимов, М.А. Мерзликин

Contents

COMPUTATIONAL MATHEMATICS

Semantic Segmentation with Uncertainty Estimation Based on the Dirichlet Model and Anisotropic Regularization 7
E.Yu. Shchetinin, A.A. Shevchuk

Numerical Solution of Boundary Value Problems with a Homogeneous Linear Partial Differential Equation by a Modified Bubnov-Galerkin Method on a Rectangle 21
N.K. Volosova, K.A. Volosov, A.K. Volosova, N.A. Gurieva, M.I. Karlov, D.F. Pastukhov, Yu.F. Pastukhov

MATHEMATICAL MODELLING

Semi-Empirical Parameterization of Vertically Inhomogeneous Turbulent Exchange in Stratified Shallow Water Bodies Based on In Situ Data 37
S.V. Protsenko, E.A. Protsenko

Function Approximation by Neural Networks 50
A.V. Galaburdin

INFORMATION TECHNOLOGIES

Oil Spill Detection Based on Enhanced LBP Neural Algorithms for Noisy Satellite Images 58
A.I. Sukhinov, D.A. Solomakha, V.V. Sidoryakina

A Geometric-Combinatorial Approach to the Constructing Fractals with Cubic Symmetry 72
E.V. Kravchenko, A.M. Pupasov-Maksimov, M.A. Merzlikin

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

COMPUTATIONAL MATHEMATICS



УДК 004.93

Оригинальное теоретическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2026-10-1-7-20>


Семантическая сегментация с оценкой неопределённости на основе модели Дирихле и анизотропной регуляризации

 Е.Ю. Щетинин , А.А. Шевчук 

Севастопольский государственный университет, г. Севастополь, Российская Федерация

✉ riviera-molto@mail.ru

Аннотация

Введение. В задачах вычислительной математики вариационные методы минимизации дискретных энергий широко применяются для регуляризации некорректных задач. Однако стандартные дискретные схемы зачастую обладают масштабной несогласованностью: при измельчении сетки ($h \rightarrow 0$) веса, зависящие от ненормированных скачков функции, вырождаются, что приводит к тривиализации анизотропных свойств предельного оператора. В данной работе предложен вычислительный метод, решающий эту проблему за счет параметризации распределения Дирихле и строго обоснованной анизотропной пространственной регуляризации.

Материалы и методы. Математическая модель формулируется как задача оптимизации составного функционала в пространстве сеточных функций. Функционал включает ожидаемую логарифмическую функцию потерь, регуляризацию Кульбака-Лейблера и пространственные регуляризаторы типа взвешенной энергии Дирихле. Для обеспечения структурной состоятельности дискретного оператора *edge-aware* весовые функции конструируются строго через нормированные конечные разности. Асимптотическое поведение дискретных энергий исследуется с помощью аппарата сходимости.

Результаты исследования. Главным теоретическим результатом работы является математическое доказательство Γ -сходимости семейства дискретных анизотропных функционалов к нетривиальному непрерывному пределу в топологии $L^2(\Omega)$. Доказана равнокоэрцитивность дискретных энергий, гарантирующая сходимость последовательности почти минимизаторов к решению непрерывной задачи.

Обсуждение. Использование нормированных конечных разностей при построении весов восстанавливает размерную однородность и обеспечивает строгую масштабную инвариантность дискретизации нелокальных операторов.

Заключение. Предложенный метод успешно связывает непрерывные вариационные постановки с дискретными предиктивными моделями, предоставляя теоретически обоснованный и вычислительно эффективный (дополнительные расходы инференса составляют 17–18 %) инструмент с контролируемой погрешностью.

Ключевые слова: семантическая сегментация, распределение Дирихле, оценка неопределённости, калибровка вероятностей, анизотропная регуляризация, энергия Дирихле, Γ -сходимость, равнокоэрцитивность, медицинские изображения

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Севастопольского государственного университета (проект № 42–01–09/319/2025–1).

Для цитирования. Щетинин Е.Ю., Шевчук А.А. Семантическая сегментация с оценкой неопределённости на основе модели Дирихле и анизотропной регуляризации. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2026;10(1):7–20. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2026-10-1-7-20>

Semantic Segmentation with Uncertainty Estimation Based on the Dirichlet Model and Anisotropic Regularization

Evgeny Yu. Shchetinin  , Andrey A. Shevchuk 

Sevastopol State University, Sevastopol, Russia

 riviera-molto@mail.ru

Abstract

Introduction. In computational mathematics, variational methods for minimizing discrete energies are widely used for the regularization of ill-posed problems. However, standard discrete schemes often suffer from scale inconsistency: upon mesh refinement ($h \rightarrow 0$), weights depending on unnormalized jumps of the function degenerate, leading to trivialization of the anisotropic properties of the limiting operator. In this paper, a computational method is proposed that solves this problem by parameterizing the Dirichlet distribution and employing rigorously justified anisotropic spatial regularization.

Materials and Methods. The mathematical model is formulated as an optimization problem for a composite functional in the space of grid functions. The functional includes an expected logarithmic loss function, Kullback-Leibler regularization, and spatial regularizers of the weighted Dirichlet energy type. To ensure the structural consistency of the discrete operator, *edge-aware* weight functions are constructed strictly through normalized finite differences. The asymptotic behavior of the discrete energies is investigated using the apparatus of Γ -convergence.

Results. The main theoretical result of the work is a mathematical proof of the Γ -convergence of a family of discrete anisotropic functionals to a non-trivial continuous limit in the $L^2(\Omega)$ topology. The equicoercivity of the discrete energies is proven, guaranteeing the convergence of a sequence of almost minimizers to the solution of the continuous problem.

Discussion. The use of normalized finite differences in constructing the weights restores dimensional homogeneity and ensures strict scale invariance of the discretization of non-local operators.

Conclusion. The proposed method successfully links continuous variational formulations with discrete predictive models, providing a theoretically justified and computationally efficient tool (additional inference costs amount to 17–18%) with controlled error.

Keywords: semantic segmentation, Dirichlet distribution, uncertainty estimation, probability calibration, anisotropic regularization, Dirichlet energy, Γ -convergence, equicoercivity, medical images

Funding. The work was supported by Sevastopol State University (Project No. 42–01–09/319/2025–1).

For Citation. Shchetinin E. Yu., Shevchuk A. A. Semantic Segmentation with Uncertainty Estimation Based on the Dirichlet Model and Anisotropic Regularization. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2026;10(1):7–20. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2026-10-1-7-20>

Введение. Семантическая сегментация медицинских изображений является ключевой задачей компьютерного зрения в диагностике. Однако современные глубокие нейронные сети часто не предоставляют надёжных оценок уверенности в своих предсказаниях [1, 2]. В клинической практике это ограничивает их применение, поскольку врач должен иметь возможность идентифицировать области, где модель неточна, для дополнительной проверки.

Существующие методы оценки неопределённости разделяются на две основные категории:

1. Стохастические методы (*MC-dropout* [3], глубокие ансамбли [4]), требующие многократных прогонов на этапе инференса, что делает их непригодными для приложений реального времени.

2. Детерминированные методы прямого предсказания параметров распределения (*Evidential Deep Learning* [5], *Prior Networks* [6]), которые работают за один проход, но часто страдают от пространственной несогласованности карт неопределённости.

Ряд работ исследует надёжность оценок неопределённости в медицинской сегментации [7] и применение байесовских методов для детекции поражений [8]. Вопросы калибровки предиктивных распределений рассматриваются в [9]. В последнее время появились методы, использующие распределение Дирихле для оценки неопределённости в медицинской сегментации, включая подходы на основе *evidence theory* [10] и адаптивные методы [11]. Развиваются также структурные подходы к неопределённости [12] и методы, устойчивые к зашумлённой разметке [13].

Основными целями настоящей работы являются:

1. Формулировка задачи как минимизации составного функционала с распределением Дирихле и анизотропной пространственной регуляризацией.

2. Определение *edge-aware* весов через нормированные конечные разности, обеспечивающее нетривиальный непрерывный предел.

3. Доказательство Γ -сходимости дискретных анизотропных энергий к непрерывному пределу; ключевые технические шаги (нижняя полунепрерывность взвешенных интегралов и равнокоэрцитивность/компактность).

4. Всесторонняя экспериментальная валидация с расширенным статистическим протоколом, включающим корректные меры размера эффекта для парных данных. Вопросы устойчивости к данным вне распределения (*OOD*) требуют отдельного исследования и выходят за рамки данной работы.

Напомним, что распределение Дирихле — вероятностное распределение на симплексе; энергия Дирихле — функционал вида $\int_{\Omega} \|\nabla u(\xi)\|^2 d\xi$; равнокоэрцитивность — равномерная по параметру дискретизации коэрцитивность семейства функционалов.

Материалы и методы. Постановка задачи и математическая модель.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с липшицевой границей, $d \in \{2,3\}$.

Определение 1 (Функциональные пространства). Пусть $L^p(\Omega; \mathbb{R}^r)$ — пространство Лебега измеримых функций $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^r$ с нормой

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} \|u(\xi)\|_{\mathbb{R}^r}^p d\xi \right)^{1/p}, \quad (1)$$

где $\|u(\xi)\|_{\mathbb{R}^r} = \left(\sum_{j=1}^r |u_j(\xi)|^2 \right)^{1/2}$ — евклидова норма в \mathbb{R}^r ; $W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^r)$ — пространство Соболева функций с квадратично интегрируемыми слабыми производными первого порядка; $\Delta^{K-1} = \left\{ p \in \mathbb{R}_+^K : \sum_{k=1}^K p_k = 1 \right\}$ — стандартный $(K-1)$ -мерный симплекс.

Соглашение о нормах. Для матрицы $A \in \mathbb{R}^{r \times d}$ (в частности, для матрицы Якоби ∇_u) используется норма Фробениуса:

$$\|A\|_F^2 = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^d |A_{jk}|^2. \quad (2)$$

Для вектора $v \in \mathbb{R}^r$ используется евклидова норма $\|v\|_{\mathbb{R}^r} = \sum_{j=1}^r |v_j|^2$. Когда тип нормы ясен из контекста, индексы опускаются.

Дискретизация области

Определение 2 (Равномерная сетка). Пусть $\Omega = (0,1)^d$, $d \in \{2,3\}$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \Omega$. Для целого $N \geq 2$ положим $h := \frac{1}{N}$. Определим равномерную декартову сетку шага h как множество узлов

$$\Omega_h := \Omega \cap h\mathbb{Z}^d = \{x = (i_1 h, \dots, i_d h) \in \Omega : i_k \in \mathbb{Z}\}. \quad (3)$$

Соответствующее разбиение \mathcal{T}_h состоит из равных гиперпрямоугольных ячеек $K_i := \prod_{k=1}^d [i_k h, (i_k + 1)h]$, $i = (i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{Z}^d$, так что $\bar{\Omega} = \bigcup_i K_i$ и внутренние ячейки имеют одинаковый размер $h \times \dots \times h$. При необходимости можно различать внутренние $\Omega_h^\circ := \{\xi_i \in \Omega : 1 \leq i_k \leq N-1\}$ и граничные $\partial\Omega_h := \Omega_h \setminus \Omega_h^\circ$ узлы.

Предположение (G) (Регулярность сетки). Семейство разбиений $\{\mathcal{T}_h\}_{h \downarrow 0}$ называется квазиравномерным (*shape-regular*), если существует константа $C_G > 0$ не зависящая от h , такая что для любой ячейки $K \in \mathcal{T}_h$ выполнено $\frac{h_K}{\rho_K} \leq C_G$, $h_K := \text{diam}(K)$, $\rho_K := \sup\{r > 0 : \exists B_r(y) \subset K\}$, где ρ_K — радиус вписанного шара ячейки K .

Замечание для равномерной сетки (3).

Для $K_i = [i_1 h, (i_1 + 1)h] \times \dots \times [i_d h, (i_d + 1)h]$ имеем $h_K = \sqrt{d} h$, $\rho_K = \frac{h}{2}$, поэтому $\frac{h_K}{\rho_K} = 2\sqrt{d}$, и предположение (G) выполняется с $C_G = 2\sqrt{d}$ (в частности, $C_G = 2\sqrt{d}$ при $d = 2$ и $C_G = 2\sqrt{3}$ при $d = 3$).

Определение 3 (Множества узлов). Полный набор внутренних узлов: $\Omega_h^\circ = \{x \in \Omega_h : \text{dist}(x, \partial\Omega) > h\sqrt{d}\}$. Внутренние узлы относительно направления $k \in \{1, \dots, d\}$:

$$\Omega_h^{(k)} = \{x \in \Omega_h : x + h e_k \in \Omega_h\}, \quad (4)$$

где e_k — k -й канонический базисный вектор в \mathbb{R}^d .

Определение 4 (Пространства сеточных функций). Скалярные функции: $V_h = \{v_h : \Omega_h \rightarrow \mathbb{R}\}$. Векторные функции: $V_h^r = \{u_h : \Omega_h \rightarrow \mathbb{R}^r\}$.

Пространство V_h наделяется дискретной L^2 нормой:

$$\|v_h\|_h^2 = h^d \sum_{x \in \Omega_h} |v_h(x)|^2. \quad (5)$$

Аналогично для V_h^r :

$$\|u_h\|_h^2 = h^d \sum_{x \in \Omega_h} \|u_h(x)\|_{\mathbb{R}^r}^2. \quad (6)$$

Операторы дискретизации и интерполяции.

Определение 5 (Оператор ограничения). Для $u \in C^0(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^r)$ определим оператор ограничения как

$$\Pi_h : C^0(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^r) \rightarrow V_h^r : (\Pi_h u)(x) = u(x), \quad x \in \Omega_h. \quad (7)$$

Определение 6 (Нормированная конечная разность). Для $v_h \in V_h$ и $k \in \{1, \dots, d\}$:

$$D_k^+ v_h(x) = \frac{v_h(x + h e_k) - v_h(x)}{h}, \quad x \in \Omega_h^{(k)}. \quad (8)$$

Для $u_h \in V_h^r$ определение применяется покомпонентно:

$$(D_k^+ u_h)_j(x) = D_k^+(u_h)_j(x), \quad j = 1, \dots, r. \quad (9)$$

Определение 7 (Мультилинейная интерполяция). Оператор $\mathcal{T}_h : V_h^r \rightarrow W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^r)$ — стандартная Q_1 -интерполяция (билинейная при $d = 2$ трилинейная при $d = 3$), определяемая условиями:

1. $(\mathcal{T}_h u_h)(x) = u_h(x)$ для всех $x \in \Omega_h$.
2. На каждой ячейке C_x функция $\mathcal{T}_h u_h$ является полиномом не выше первой степени по каждой переменной.

Определение 8 (Кусочно-постоянное продолжение). Для $v_h \in V_h$ определим $v_h \in L^\infty(\Omega)$:

$$v_h(\xi) = v_h(x), \quad \xi \in C_x = [x_1, x_1 + h) \times \dots \times [x_d, x_d + h), \quad (10)$$

где $x \in \Omega_h$ левый нижний угол ячейки, содержащей ξ . Аналогично определяется u_h для $u_h \in V_h^r$.

Вероятностная модель на основе распределения Дирихле.

Пусть $I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^C$ — входное изображение (непрерывная функция или её дискретизация $I_h = \Pi_h I$), $y : \Omega_L \rightarrow \{1, \dots, K\}$ — разметка на подмножестве $\Omega_L \subseteq \Omega_h$. В каждом узле $x \in \Omega_h$ моделируем вектор вероятностей классов $p(x) \in \Delta^{K-1}$:

$$p(\mathbf{p}(x) | \mathbf{a}(x)) = \text{Dir}(\mathbf{p}(x) | \mathbf{a}(x)) = \frac{1}{B(\mathbf{a}(x))} \prod_{k=1}^K p_k(x)^{\alpha_k(x)-1}, \quad (11)$$

где $\mathbf{a}(x) = (\alpha_1(x), \dots, \alpha_K(x)) \in \mathbb{R}_{>0}^K$ — параметры концентрации, $B(\mathbf{a}) = \prod_k \Gamma(\alpha_k) / \Gamma(\sum_k \alpha_k)$ — бета-функция.

Предиктивное среднее:

$$\mathbf{m}(x) = \mathbb{E}[\mathbf{p}(x) | \mathbf{a}(x)] = \frac{\mathbf{a}(x)}{S(x)}, \quad S(x) = \sum_{k=1}^K \alpha_k(x). \quad (12)$$

Карта неопределённости.

Лемма 1 (Взаимная информация как мера неопределённости). Для иерархической модели $Y | \mathbf{p} \sim \text{Cat}(\mathbf{p})$, $\mathbf{p} | \mathbf{a} \sim \text{Dir}(\mathbf{a})$ взаимная информация $U(x) = I(Y; \mathbf{p} | \mathbf{a})$ имеет вид:

$$U(x) = H[\mathbf{m}(x)] - \left(\psi(S(x) + 1) - \sum_{k=1}^K \frac{\alpha_k(x)}{S(x)} \psi(\alpha_k(x) + 1) \right), \quad (13)$$

где $H[\mathbf{m}] = -\sum_k m_k \log m_k$ — энтропия Шеннона, ψ — дигамма-функция.

В частности, дискретный регуляризатор Γ сходится к непрерывному:

$$\mathcal{J}^{\text{reg}} = \beta_{\text{KL}} R_{\text{KL}} + \lambda_m R_m + \lambda_s R_s. \quad (14)$$

Доказательство. Следует из разложения $I(Y; \mathbf{p}) = H(Y) - \mathbb{E}_{\mathbf{p}}[H(Y | \mathbf{p})]$ и свойств распределения Дирихле [5, Приложение А].

Определение 9 (Edge-aware веса). Для изображения $I \in C^0(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^C)$ и параметров $\eta > 0$, $\varepsilon > 0$ определим дискретные веса:

$$w_h^k(x) = \exp\left(-\eta \|D_k^+(\Pi_h I)(x)\|_{\mathbb{R}^C}^2\right) + \varepsilon, \quad x \in \Omega_h^{(k)}. \quad (15)$$

Замечание 1. Использование нормированной разности D_k^+ (деление на h) критично: это обеспечивает сходимость к нетривиальной предельной функции

$$w^k(\xi) = \exp\left(-\eta \|\partial_k I(\xi)\|_{\mathbb{R}^C}^2\right) + \varepsilon \quad (16)$$

при $h \rightarrow 0$ тогда как ненормированные разности давали бы $w_h^k \rightarrow 1 + \varepsilon \equiv \text{const}$.

Определение 10 (Составной функционал). Полный функционал для оптимизации:

$$\mathcal{J}_h[\mathbf{a}_h] = \mathcal{L}_{\text{data}}[\mathbf{a}_h] + \beta_{\text{KL}} \mathcal{R}_{\text{KL}}[\mathbf{a}_h] + \lambda_m \mathcal{R}_m[\mathbf{m}_h] + \lambda_s \mathcal{R}_s[S_h], \quad (17)$$

где $\mathbf{a}_h \in V_h^K$, $\mathbf{m}_h = \mathbf{a}_h / S_h \in V_h^K$, $S_h = \sum_{k=1}^K (\mathbf{a}_h)_k \in V_h$.

Согласование с данными (ожидаемая log-потеря):

$$\mathcal{L}_{\text{data}}[\mathbf{a}_h] = h^d \sum_{x \in \Omega_L} \left(\psi(S_h(x)) - \psi((\mathbf{a}_h)_{y(x)}(x)) \right). \quad (18)$$

KL-регуляризация к равномерному априорному:

$$\mathcal{R}_{\text{KL}}[\mathbf{a}_h] = h^d \sum_{x \in \Omega_h} \text{KL}\left(\text{Dir}(\mathbf{a}_h(x)) \parallel \text{Dir}(\mathbf{1})\right). \quad (19)$$

Анизотропные пространственные регуляризаторы:

$$\mathcal{R}_m[\mathbf{m}_h] = h^d \sum_{k=1}^d \sum_{x \in \Omega_h^{(k)}} w_h^k(x) \|D_k^+ \mathbf{m}_h(x)\|_{\mathbb{R}^K}^2, \quad (20)$$

$$\mathcal{R}_s[S_h] = h^d \sum_{k=1}^d \sum_{x \in \Omega_h^{(k)}} w_h^k(x) |D_k^+ \log S_h(x)|^2. \quad (21)$$

Теоретическое обоснование. В этом разделе фиксируем корректную (масштабно-согласованную) дискретизацию анизотропной энергии Дирихле и формулируем Γ -сходимость соответствующих дискретных функционалов. Подробные доказательства стандартны и опираются на классические результаты Γ -сходимости [14–16].

Непрерывная и дискретная энергии. Пусть $W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^r)$ и $w^k \in L^\infty(\Omega)$, $k = 1, \dots, d$.

Непрерывная энергия: $E[u] = \sum_{k=1}^d \int_{\Omega} w^k(\xi) \|\partial_k u(\xi)\|_{\mathbb{R}^r}^2 d\xi$.

Дискретная энергия для $u_h \in V_h^r$ определяется через нормированные конечные разности $D_k^+ u_h(x) = (u_h(x + h e_k) - u_h(x)) / h$:

$$E_h[u_h] = h^d \sum_{k=1}^d \sum_{x \in \Omega_h^{(k)}} w_h^k(x) \|D_k^+ u_h(x)\|_{\mathbb{R}^r}^2. \quad (22)$$

Условия на веса:

(W1) $\varepsilon \leq w_h^k(x) \leq \bar{w}$; (W2) кусочно-постоянное продолжение $w_h^k \rightarrow w^k$ в $L^1(\Omega)$.

Теорема 1 (Г-сходимость энергий). Пусть веса удовлетворяют условиям (W1)–(W2). Тогда дискретные энергии E_h Г-сходятся к непрерывной энергии E в топологии $L^2(\Omega; \mathbb{R}^r)$, а семейство $\{E_h\}$ равнокоэрцитивно на подпространстве функций с фиксированным средним значением (или при периодических граничных условиях). Следовательно, любая последовательность почти минимизаторов имеет (возможно, после выделения подпоследовательности) предел u — минимизатор E .

Доказательство.

1) Равнокоэрцитивность. Пусть $\{u_h\} \in V_h^r$ и $\sup_h E_h[u_h] < \infty$. Из нижней оценки (W1) получаем контроль дискретных градиентов:

$$\sum_{k=1}^d \|D_k^+ u_h\|_{0,h}^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} E_h[u_h]. \quad (23)$$

При выбранной калибровке (фиксированное среднее или периодические/фиксирующие граничные условия) дискретное неравенство Пуанкаре даёт контроль нормы L^2 и последовательность $\{u_h\}$ становится компактной в $L^2(\Omega; \mathbb{R}^r)$ после интерполяции.

Переходя к мультилинейной интерполяции $I_h u_h$, используем стандартную оценку устойчивости интерполяции:

$$\|\nabla(I_h u_h)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla_h u_h\|_{0,h}. \quad (24)$$

Следовательно, $\{I_h u_h\}$ ограничена в $H^1(\Omega; \mathbb{R}^r)$. По теореме Реллиха-Кондрашова существует такая подпоследовательность, что $I_h u_h \rightharpoonup u$ в $H^1(\Omega; \mathbb{R}^r)$ и $I_h u_h \rightarrow u$ в $L^2(\Omega; \mathbb{R}^r)$. Это и даёт равнокоэрцитивность в топологии L^2 .

2) *Liminf*-неравенство. Пусть $u_h \rightarrow u$ в $L^2(\Omega; \mathbb{R}^r)$ и $\sup_h E_h[u_h] < \infty$. Тогда, как и выше, можно считать, что $I_h u_h \rightharpoonup u$ в H^1 и $D_k^+ u_h \rightharpoonup \partial_k u$ в L^2 (после продолжения на Ω). По (W2) имеем $w_h^k \rightarrow w^k$ в L^∞ . Для каждого направления k используем слабую полунепрерывность снизу квадратичной формы; получаем

$$\int_{\Omega} w^k |\partial_k u|^2 \leq \liminf_{h \rightarrow 0} \int_{\Omega} w^k |D_k^+ u_h|^2. \quad (25)$$

Замена w_h^k на w^k контролируется оценкой

$$\left| \int_{\Omega} (w_h^k - w^k) |D_k^+ u_h|^2 \right| \leq \|w_h^k - w^k\|_{L^\infty(\Omega)} \|D_k^+ u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow 0. \quad (26)$$

Суммируя по $k = 1, \dots, d$, получаем *liminf*-неравенство $E_h[u_h] \geq E[u]$.

3) *Limsup*-неравенство (восстанавливающая последовательность).

Пусть $u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^r)$. Построим $u_h \in \mathbb{R}^r \Omega_h^1$ следующим образом.

Случай А (узловая дискретизация / ограничение на узлы). Предположим, что $(u_h)_i := u(\xi_i)$, $\xi_i \in \Omega_h^\circ$, и рассмотрим кусочно-линейную (или кусочно-постоянную) интерполяцию $\mathcal{I}_h u_h \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^r)$.

Случай В (проекция по ячейкам / L^2 -дискретизация).

Предположим, что

$$(u_h)_i := \frac{1}{|K_i|} \int_{K_i} u(x) dx, \quad u_h := \Pi_h u, \quad (27)$$

где $K_i \in \mathcal{T}_h$ ячейка, ассоциированная с индексом i , а Π_h — оператор ячейкового усреднения (L^2 — проекция на пространство кусочно-постоянных функций). В этом случае $\mathcal{I}_h u_h$ кусочно-постоянная функция на \mathcal{T}_h .

В обоих случаях (при квазиравномерности сетки и стандартных свойствах Π_h, \mathcal{I}_h , выполняется аппроксимация градиента: $D_k^+ u_h \rightarrow \partial_k u$ в $L^2(\Omega; \mathbb{R}^r)$, $k = 1, \dots, d$, а также $\mathcal{I}_h u_h \rightarrow u$ в $L^2(\Omega; \mathbb{R}^r)$). Далее, из предположений о весах (W2) и ограниченности (W1) имеем $w_h^k \rightarrow w^k$ в $L^\infty(\Omega)$, $0 < \varepsilon \leq w_h^k(x) \leq M$. Следовательно, пользуясь сходимостью дискретных градиентов и сходимостью римановых сумм к интегралам, получаем $E_h[u_h] \rightarrow E[u]$. Тем самым для фиксированного $u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^r)$ построена восстанавливающая последовательность u_h , удовлетворяющая $\limsup E_h[u_h] \leq E[u]$. Теперь пусть $u \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^r)$ и $E[u] < 0$. Тогда $u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^r)$. Построим последовательность $u^{(m)} \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^r) \cap H^1(\Omega; \mathbb{R}^r)$, такую что $u^{(m)} \rightarrow u$ в $H^1(\Omega; \mathbb{R}^r)$, $E[u^{(m)}] \rightarrow E[u]$. Для каждого m построим $u_h^{(m)}$ по одному из случаев А/В выше, так что $\lim_{h \rightarrow 0} E_h[u_h^{(m)}] = E[u^{(m)}]$. Выбирая диагональную подпоследовательность $h = h(m) \downarrow$ получаем последовательность $u_{h(m)} := u_{h(m)}^{(m)}$, для которой $u_{h(m)} \rightarrow u$ в $L^2(\Omega; \mathbb{R}^r)$, $\limsup_{m \rightarrow \infty} E_{h(m)}[u_{h(m)}] \leq E[u]$. Тем самым *limsup*-неравенство доказано для всех u с конечной предельной энергией.

Итак, $E_h \xrightarrow{\Gamma} E$ в топологии $L^2(\Omega; \mathbb{R}^r)$, а семейство $\{E_h\}$ равнокоэрцитивно по фундаментальной теореме Γ -сходимости о сходимости почти-минимизаторов [14]. Отсюда следует, что всякая последовательность почти-минимизаторов $\{u_h\}$ имеет L^2 -сходящуюся подпоследовательность к минимизатору предельного функционала, а минимальные значения $\inf E_h$ сходятся к $\inf E$.

Теорема 2 (Γ -сходимость регуляризатора). Пусть дискретные регуляризаторы $R_m[m_h]$ и $R_s[S_h]$ заданы формулами (19)–(20), а веса удовлетворяют (W1)–(W2). Предположим также, что $S_h(x) \geq S_{\min} > 0$ (в реализации это обеспечивается параметризацией $\alpha_k(x) = 1 + \text{softplus}(s_k(x))$), поэтому $\log S_h$ корректно определён). Тогда R_m и R_s Γ -сходятся в топологии L^2 к функционалам:

$$R_m(m) = \sum_{k=1}^d \int_{\Omega} w^k(\xi) \|\partial_k m(\xi)\|^2 d\xi, \quad m \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^K), \quad (28)$$

$$R_s(S) = \sum_{k=1}^d \int_{\Omega} w^k(\xi) |\partial_k \log S(\xi)|^2 d\xi, \quad \log S \in H^1(\Omega). \quad (29)$$

Доказательство.

Пункт R_m следует из Теоремы 1, применённой покомпонентно к векторному полю m_h : дискретный функционал (19) есть сумма по направлениям квадратичных энергий типа E_h , а Γ -пределом является сумма соответствующих интегралов. Для R_s применяем Теорему 1 к скалярной функции $u_h = \log S_h$ (условие $S_h \geq S_{\min}$ гарантирует корректность). Γ -сходимость линейной комбинации J_r^{reg} следует из устойчивости Γ -сходимости относительно сложения функционалов и умножения на положительные константы.

Замечание 1' (устранение ядра градиента). Для корректной коэрцитивности квадратичных энергий фиксируем калибровку: либо рассматриваем функции нулевого среднего, либо задаём периодические граничные условия, либо фиксируем значение в одной точке. Выбор не влияет на Γ -предел и используется только для исключения добавления константы.

Архитектура нейронной сети.

В качестве базовой архитектуры используется *U-Net* [17] с энкодером *ResNet-34* [18], предобученным на *ImageNet*.

Параметризация выхода. Сеть предсказывает логиты $\mathbf{s}(x) \in \mathbb{R}^K$ для каждого пикселя x . Параметры Дирихле вычисляются как

$$\alpha_k(x) = 1 + \text{softplus}(s_k(x)) = 1 + \log(1 + \exp(s_k(x))), \quad k = 1, \dots, K. \quad (30)$$

Это гарантирует $\alpha_k(x) > 1$ что соответствует унимодальному распределению Дирихле.

Предиктивные вероятности:

$$\mathbf{m}(x) = \frac{\boldsymbol{\alpha}(x)}{S(x)}, \quad S(x) = \sum_{k=1}^K \alpha_k(x). \quad (31)$$

Веса *edge-aware* вычисляются один раз перед обучением для каждого изображения I :

$$w_h^k(x) = \exp\left(-\eta \left\| \frac{I(x + he_k) - I(x)}{h} \right\|^2\right) + \varepsilon. \quad (32)$$

На практике для изображений с дискретными пикселями $h = 1$ (один пиксель), и формула упрощается до:

$$w_{i,j}^k = \exp\left(-\eta \|I_{i+\delta_k, j+\delta_l} - I_{i,j}\|^2\right) + \varepsilon, \quad (33)$$

где $(\delta_k, \delta_l) \in ((1,0), (0,1))$ для $d = 2$.

Замечание 2. При изменении разрешения изображения (например, при работе с пирамидами) параметр η не требует перенастройки благодаря нормировке на h .

Алгоритм оптимизации. Обучение модели.

Вход: Обучающая выборка $((I^{(n)}, y^{(n)}))_{n=1}^N$ гиперпараметры $\beta_{\text{KL}}, \lambda_m, \lambda_s, \eta, \varepsilon$.

Выход: Параметры сети θ^* .

Шаги алгоритма:

1. Предвычисление весов: для каждого $I^{(n)}$ вычислить w_h^k .

2. Инициализация: $\theta \rightarrow \theta_0$ (предобученные веса).

3. Цикл по эпохам: Для $t = 1, \dots, T$:

Для каждого мини-батча \mathcal{B} :

Прямой проход: $\boldsymbol{\alpha}^{(n)} = f_{\theta}(I^{(n)})$ для $n \in \mathcal{B}$.

Вычисление функционала потерь (16).

Обратное распространение и шаг оптимизатора *Adam* [19].

4. Возврат: $\theta^* = \theta$.

Дополнительные расходы разработанного метода (+18 %) (Таблица 1) обусловлены:

– вычислением K параметров α_k вместо K логитов (незначительно);

– предвычислением весов w_h^k (один раз на изображение).

Таблица 1

Временные затраты метода (NVIDIA A100, изображение $batch\ size = 1$, только инференс)

Метод	Время (мс)	Относительно
Baseline (CE)	22±1	100 %
Разработанный метод	26±1	118 %
MC-dropout ($T = 30$)	660±15	3000 %
Deep Ensembles ($M = 5$)	110±5	500 %

Протокол подбора гиперпараметров (Таблица 2). Гиперпараметры подбирались с помощью 5-кратной кросс-валидации исключительно на $train+val$. Тестовая выборка не использовалась ни на одном этапе выбора модели или параметров. После фиксации гиперпараметров проводилось:

1. Финальное обучение на $train$.
2. Early stopping по val .
3. Оценка на $test$.

Таблица 2

Характеристики наборов данных

Датасет	Модальность	Train	Val	Test	Классы
ACDC [20]	MPT сердца	70	10	20	4
Synapse [21]	КТ брюшной полости	18	6	6	9
CHAOS [22]	КТ/MPT печени	24	8	8	4

Примечание ($split$ по пациентам). Во всех наборах данных разбиение $train/val/test$ выполняется на уровне пациентов (объёмов), а не отдельных 2D-срезов, что исключает утечку информации между подвыборками. Результаты усреднены по 10 независимым запускам с разными $random\ seeds$. Все методы обучались с идентичными условиями: фиксированные разбиения данных, одинаковые начальные веса для сопоставимых архитектур.

Метрики качества.

Сегментация:

$$Dice = 2 | A \cap B | / (| A | + | B |), IoU = | A \cap B | / | A \cup B |. \quad (34)$$

Калибровка: ECE (*Expected Calibration Error*): 15 равномерных бинов по $confidence$, $micro-averaging$ по пикселям всех классов (включая фон):

$$ECE = \sum_{b=1}^{15} \frac{n_b}{N} | acc(b) - conf(b) |, \quad (35)$$

где число пикселей в бине b , доля правильных предсказаний, средняя уверенность. NLL (*Negative Log-Likelihood*): среднее по пикселям $-\log_{y(x)}(x)$.

Обнаружение ошибок. AUROC: площадь под ROC-кривой для бинарной задачи «корректное/ошибочное предсказание» с неопределённостью $U(x)$ в качестве $score$. AURC (*Area Under Risk-Coverage Curve*): оценка селективной сегментации [23].

Статистический анализ. Размер эффекта для парных данных. Поскольку сравнения проводятся на одних и тех же тестовых примерах (парный дизайн), используется *Cohen's d_z* : $d_z = \frac{\bar{D}}{s_D}$, $D_i = X_i^{our} - X_i^{baseline}$, где \bar{D} — среднее разностей, s_D — стандартное отклонение разностей.

Проверка нормальности. Тест Шапиро-Уилка применялся к разностям для каждой метрики. При использовался знаковый ранговый критерий Уилкоксона; в остальных случаях — парный t -критерий.

Коррекция на множественные сравнения. Поправка *Holm-Bonferroni* применялась внутри каждого семейства гипотез (сравнения с $baseline$ для одного датасета). Для сравнений между датасетами применялся FDR -контроль по *Benjamini-Hochberg*.

Доверительные интервалы. 95 % ВСа бутстрап-интервалы (10000 реплик) для всех метрик.

Сравниваемые методы:

1. CE ($baseline$): кросс-энтропийная потеря, $U-Net + ResNet-34$.
2. MC-dropout [3]: $dropout\ p = 0,5$ на этапе инференса, $T = 30$ прогонов.
3. Deep Ensembles [4]: $M = 5$ независимо обученных моделей.
4. Evidential U-Net [10]: распределение Дирихле без пространственной регуляризации.
5. UDEL [11]: адаптивная оценка неопределённости.
6. Разработанный метод: полный функционал (16).
7. nnU-Net [24]: внешний ориентир ($self-configuring\ pipeline$, не является строго сопоставимым).

Результаты исследования.

Таблица 3

Качество сегментации и калибровка на ACDC (среднее \pm std, 10 запусков)

Метод	<i>Dice</i>	<i>ECE</i>	<i>NLL</i>
<i>CE</i>	0,891 \pm 0,011	0,078 \pm 0,006	0,351 \pm 0,018
<i>MC-dropout</i>	0,897 \pm 0,010	0,032 \pm 0,004	0,315 \pm 0,014
<i>Deep Ensembles</i>	0,908 \pm 0,008	0,024 \pm 0,003	0,301 \pm 0,012
<i>Evidential U-Net</i>	0,909 \pm 0,008	0,023 \pm 0,003	0,303 \pm 0,013
<i>UDEL</i>	0,907 \pm 0,009	0,025 \pm 0,004	0,306 \pm 0,014
Разработанный метод	0,912 \pm 0,008	0,021 \pm 0,003	0,298 \pm 0,012
<i>nnU-Net</i>	0,915 \pm 0,007	0,023 \pm 0,003	0,295 \pm 0,011

Таблица 4

Обнаружение ошибок и селективная сегментация (ACDC)

Метод	<i>AUROC</i>	95 % <i>CI</i>	<i>AURC</i>	95 % <i>CI</i>
<i>CE</i> (энтропия)	0,812 \pm 0,015	[0,798, 0,826]	0,178 \pm 0,012	[0,166, 0,190]
<i>MC-dropout</i>	0,847 \pm 0,013	[0,835, 0,859]	0,156 \pm 0,010	[0,146, 0,166]
<i>Deep Ensembles</i>	0,875 \pm 0,011	[0,865, 0,885]	0,132 \pm 0,008	[0,124, 0,140]
<i>Evidential U-Net</i>	0,8885 \pm 0,010	[0,876, 0,894]	0,129 \pm 0,007	[0,122, 0,136]
<i>UDEL</i>	0,882 \pm 0,011	[0,872, 0,892]	0,131 \pm 0,008	[0,123, 0,139]
Разработанный метод	0,891 \pm 0,009	[0,883, 0,899]	0,124 \pm 0,006	[0,118, 0,130]

Тест Шапиро-Уилка для разностей: $p > 0,15$ для всех метрик, нормальность не отвергается (Таблица 5).

Таблица 5

Статистическая значимость (разработанный метод vs. CE baseline, ACDC)

Метрика	Δ (разработанный — <i>CE</i>)	95 % <i>BCa CI</i>	<i>Cohen's</i>	p (<i>Holm</i>)	Тест
<i>Dice</i>	+0,021	[0,014, 0,028]	2,1	< 0,001	<i>t</i> -тест
<i>ECE</i>	-0,057	[-0,063, -0,051]	2,3	< 0,001	<i>t</i> -тест
<i>NLL</i>	-0,053	[-0,068, -0,038]	1,9	< 0,001	<i>t</i> -тест
<i>AUROC</i>	+0,079	[0,065, 0,093]	2,4	< 0,001	<i>t</i> -тест

Результаты на наборах данных *Synapse* и *CHAOS* представлены в Таблице 6.

Эмпирическая верификация теоретических результатов.

Эксперимент 1. Порядок сходимости дискретной энергии.

Тестовый профиль: $u(\xi) = \sin(\pi\xi_1) \cos(\pi\xi_2)$, $w^k(\xi) = 1 + 0,5 \cos(2\pi\xi_k)$, $\Omega = [0,1]^2$. Аналитическое значение: $E[u] = 4,9348$.

Таблица 6

Результаты на *Synapse* и *CHAOS*

Датасет	Метод	<i>Dice</i>	<i>ECE</i>	<i>AUROC</i>
<i>Synapse</i>	<i>CE</i>	0,762 \pm 0,014	0,081 \pm 0,007	0,847 \pm 0,014
<i>Synapse</i>	<i>Deep Ensembles</i>	0,785 \pm 0,010	0,027 \pm 0,004	0,887 \pm 0,010
<i>Synapse</i>	Разработанный метод	0,789 \pm 0,011	0,024 \pm 0,004	0,895 \pm 0,008
<i>CHAOS</i>	<i>CE</i>	0,883 \pm 0,012	—	0,831 \pm 0,016
<i>CHAOS</i>	<i>Deep Ensembles</i>	0,901 \pm 0,009	0,039 \pm 0,005	0,872 \pm 0,012
<i>CHAOS</i>	Разработанный метод	0,906 \pm 0,009	0,036 \pm 0,004	0,883 \pm 0,010

Таблица 7

Сходимость дискретной энергии (один тестовый профиль)

h	E_h	$ E_h - E $	Порядок
1/8	4,8721	0,0627	—
1/16	4,9035	0,0313	1,00

Окончание таблицы 7

h	E_h	$ E_h - E $	Порядок
1/32	4,9191	0,0157	0,99
1/64	4,9270	0,0078	1,01
1/128	4,9309	0,0039	1,00

Для подтверждения универсальности порядка проведены эксперименты на дополнительных профилях (Таблица 8): $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in (0,1)^2, k \in \{1,2\}$. Для В: $u(\xi) = \xi_1 + \xi_2, w^k(\xi) \equiv 1$. Для D: $u(\xi) = \exp(-(\xi_1^2 + \xi_2^2)), w^k(\xi) = \exp(-\xi_k^2)$.

Таблица 8

Порядок сходимости для различных тестовых функций

Профиль	$u(\xi)$	$w^k(\xi)$	Порядок ($h: 1/16 \rightarrow 1/128$)
<i>A</i>	$\sin(\pi\xi_1) \cos(\pi\xi_2)$	$1 + 0,5 \cos(2\pi\xi_k)$	$1,00 \pm 0,01$
<i>B</i>	$\xi_1 + \xi_2$	1	$1,01 \pm 0,01$
<i>C</i>	$\xi_1^2(1-\xi_1)^2 \xi_2^2(1-\xi_2)^2$	$1 + \xi_k$	$0,99 \pm 0,02$
<i>D</i>	$\exp(-(\xi_1^2 + \xi_2^2))$	$\exp(-\xi_k^2)$	$0,99 \pm 0,02$

Все профили демонстрируют первый порядок сходимости, согласующийся с Теоремой 1.
Абляционный анализ.

Таблица 9

Влияние компонент функционала (ACDC, 10 запусков)

Конфигурация	<i>Dice</i>	<i>ECE</i>	<i>NLL</i>	<i>AURC</i>
Полная модель	0,912	0,021	0,298	0,124
Без \mathcal{R}_{KL}	0,897	0,052	0,325	0,151
Без \mathcal{R}_m	0,899	0,048	0,320	0,145
Без \mathcal{R}_s	0,905	0,035	0,310	0,136
Ненормированные разности в весах	0,908	0,028	0,305	0,131
<i>CE baseline</i>	0,891	0,078	0,351	0,178

- Все компоненты функционала вносят вклад в улучшение.
- Наибольший эффект даёт \mathcal{R}_{KL} (калибровка).
- Нормированные разности в весах улучшают *ECE* на 25 % относительно ненормированных.

Воспроизводимость.

• Данные и разбиение: фиксированные разбиения (*splits*) по пациентам; единая предобработка и постобработка для всех методов.

• Обучение: оптимизатор *Adam*; *mixed precision (FP16/AMP)*; 10 инициализаций (*seeds*).

• Метрики: *Dice, Jaccard, ECE*; для детекции ошибок — *AUROC* и *AURC* по карте неопределённости; статистика — парный *Wilcoxon* или *t*-тест (по нормальности) с коррекцией *Holm-Bonferroni*.

• Аппаратно-программная среда: *GPU NVIDIA A100; PyTorch*; код и конфигурации — по запросу / после принятия.

Таблица 10

Оптимальные гиперпараметры (подобраны по валидационной выборке)

Параметр	Описание	<i>ACDC</i>	<i>Synapse</i>	<i>CHAOS</i>
β_{KL}	Вес KL-регуляризации	0,100	0,100	0,080
λ_m	Вес регуляризации <i>m</i>	0,010	0,015	0,012
λ_s	Вес регуляризации <i>S</i>	0,010	0,015	0,012
η	Чувствительность весов	5,000	4,500	5,500
ε	Нижняя граница весов	1×10^{-3}	1×10^{-3}	1×10^{-3}
<i>lr</i>	Скорость обучения	1×10^{-4}	1×10^{-4}	1×10^{-4}
<i>batch size</i>	Размер мини-батча	8	8	8
<i>epochs</i>	Число эпох	100	150	100

Чувствительность гиперпараметров (*ACDC*)

Таблицы 11–12: $mean \pm std$ по 10 инициализациям; варьировался один параметр, остальные брались из Таблицы 10. Здесь λ означает совместное значение $\lambda = \lambda_m = \lambda_s$.

Таблица 11

Влияние параметра η (*ACDC*)

η	<i>Dice</i>	<i>ECE</i>	<i>AUROC</i>
1,0	0,905 \pm 0,009	0,028 \pm 0,004	0,879 \pm 0,011
2,5	0,908 \pm 0,008	0,024 \pm 0,003	0,885 \pm 0,010
5,0	0,912 \pm 0,008	0,021 \pm 0,003	0,891 \pm 0,009
10,0	0,910 \pm 0,008	0,022 \pm 0,003	0,888 \pm 0,010
20,0	0,907 \pm 0,009	0,025 \pm 0,004	0,882 \pm 0,011

Таблица 12

Влияние параметра λ (*ACDC*)

λ	<i>Dice</i>	<i>ECE</i>	<i>AUROC</i>
0,001	0,903 \pm 0,010	0,031 \pm 0,004	0,875 \pm 0,012
0,005	0,908 \pm 0,009	0,025 \pm 0,003	0,884 \pm 0,010
0,010	0,912 \pm 0,008	0,021 \pm 0,003	0,891 \pm 0,009
0,020	0,909 \pm 0,008	0,023 \pm 0,003	0,887 \pm 0,010
0,050	0,901 \pm 0,011	0,027 \pm 0,004	0,878 \pm 0,012

Абляция формулировки весов (*ACDC*).

Сравнивались: (a) нормированные разности с делением на шаг сетки h ; (b) ненормированные разности (без деления на h); (c) изотропные веса $w = \varepsilon + \exp(-\eta \cdot \|\nabla_h I\|^2)$; (d) постоянные веса $w \equiv 1$ (Таблица 13).

Таблица 13

Влияние формулировки весов (*ACDC*)

Формулировка весов	<i>Dice</i>	<i>ECE</i>	<i>AUROC</i>
Нормированные разности (разработанный метод)	0,912	0,021	0,891
Ненормированные разности	0,908	0,028	0,883
Изотропные веса $w = \varepsilon + \exp(-\eta \cdot \ \nabla_h I\ ^2)$	0,909	0,024	0,886
Постоянные веса $w \equiv 1$	0,902	0,035	0,871

Метрики *AUROC* и *AURC*.

Пусть $\hat{y}(x)$ — предсказанный класс, $y(x)$ — разметка, $e(x) = 1\{\hat{y}(x) \neq y(x)\}$ — индикатор ошибки, а $U(x) \geq 0$ — скалярная неопределённость. Для детекции ошибок используем $U(x)$ как *score*:

$$e(x) = 1\{\hat{y}(x) \neq y(x)\}. \quad (36)$$

Определим покрытие и риск при пороге τ по $U(x)$:

$$\text{cov}(\tau) = \mathbb{P}(U(x) \leq \tau), \quad \text{risk}(\tau) = \mathbb{P}(e(x) = 1 \mid U(x) \leq \tau). \quad (37)$$

AUROC есть площадь под *RQC*-кривой бинарного классификатора $e(x)$ по *score* $U(x)$; *AURC* — площадь под кривой *risk-coverage*: $AURC = \int_0^1 \text{risk}(\text{cov}) d(\text{cov})$, оцениваемая дискретно по ранжированию $U(x)$.

Дискретная сетка и разностные операторы.

Равномерная сетка $\Omega_h \subset \Omega$ задаётся шагом $h = 1/N$. Для направления $k = 1, \dots, d$ используем нормированную прямую разность и дискретное скалярное произведение, определяемые формулами [26]:

$$D_{k,h} v_h(x) = \frac{v_h(x + h e_k) - v_h(x)}{h}, \quad (38)$$

$$\langle a, b \rangle_h = h^d \sum_{x \in \Omega_h} a(x) b(x), \quad (39)$$

$$\Omega_h = \{(i_1 h, \dots, i_d h) : i_j = 0, 1, \dots, N\} \cap \Omega. \quad (40)$$

Свойства распределения Дирихле и связанных с ним моментов/энтропий описаны в монографии [27].

Замечание: используем регуляризующую постановку, согласованную с классическими подходами к некорректным задачам [28].

План доказательства Γ -сходимости.

Доказательство Γ -сходимости состоит из трёх стандартных шагов: равнокоэрцитивность (компактность) семейства E_h ; оценка \liminf для произвольной сходящейся последовательности $u_h \rightarrow u$ в $L^2(\Omega)$; построение восстанавливающей последовательности (*recovery sequence*) для каждого $u \in H^1(\Omega)$. Далее используется классическая теорема Γ -сходимости о сходимости почти минимизаторов.

Лемма 1. Пусть $w^n, w \in L^\infty(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, $0 < \varepsilon \leq w_n \leq M$, $w_n \rightarrow w$ в $L^2(\Omega)$ и $f_n \rightarrow f$ в $L^2(\Omega)$. Тогда выполняется неравенство

$$\int_{\Omega} w(x) |f(x)|^2 dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} w_n(x) |f_n(x)|^2 dx. \quad (41)$$

Доказательство. Для $M_0 > 0$ разложим квадрат модуля на ограниченную и хвостовую части:

$$|f_n|^2 = \min(|f_n|^2, M_0) + (|f_n|^2 - M_0)_+. \quad (42)$$

Ограниченная часть контролируется сходимостью весов, а хвост — энергетической оценкой:

$$\int_{\Omega} (w_n - w) \min(|f_n|^2, M_0) \leq M_0 \|w_n - w\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0. \quad (43)$$

Для хвоста имеем:

$$\int_{\Omega} (|f_n|^2 - M_0)_+ \leq \frac{1}{\varepsilon M_0} \int_{\Omega} w_n |f_n|^2. \quad (44)$$

Выбирая $M_0 \rightarrow \infty$ и используя слабую полунепрерывность снизу квадратичной формы $f \mapsto \int w|f|^2$ при фиксированном w , получаем следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть $u_h \in V_h$ и $\sup_h E_h(u_h) < \infty$. При калибровке, устранивающей ядро градиента (нулевое среднее или периодические/фиксирующие граничные условия; см. Замечание 1'), существует подпоследовательность $h_j \rightarrow 0$ и функция $u \in H^1(\Omega)$ такие, что $\prod_{h_j} u_{h_j} \rightarrow u$ в $L^2(\Omega)$, а дискретные градиенты $D_k^+ u_{h_j} \rightharpoonup \partial_k u$ в $L^2(\Omega)$ для $k = 1, \dots, d$.

Доказательство. Из нижней границы $\varepsilon \leq w_h^k$ следует оценка дискретных градиентов:

$$\|D^+ u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} E_h(u_h). \quad (45)$$

Дискретное неравенство Пуанкаре при выбранной калибровке даёт равномерную ограниченность нормы L^2 ; далее компактность и идентификация предела следуют из стандартных результатов конечно-разностной/конечно-элементной аппроксимации [16].

Сшивка и следствие о почти минимизаторах.

Liminf-неравенство.

Пусть $u_h \rightarrow u$ в $L^2(\Omega; \mathbb{R}^r)$ и $\sup_h E_h[u_h] < \infty$. Тогда из равнокоэрцитивности (Лемма 2) следует, что существует такая подпоследовательность, что $D^+ u_h \rightharpoonup \nabla u$ в $L^2(\Omega; \mathbb{R}^{r \times d})$, $u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^r)$. Пусть $u_h \rightarrow u$ в $L^2(\Omega)$. Далее, из (W2) и построения весов (см. Замечание 1) имеем $w_h^k \rightarrow w^k$ в $L^\infty(\Omega)$ ($k = 1, \dots, d$), $0 < \varepsilon \leq w_h^k(x) \leq M$. Применяя Лемму 1 к последовательности $f_h : D_k^+ u_h$ и весам w_h^k получаем для каждого k : $\int_{\Omega} w^k |\partial_k u|^2 dx \leq \liminf_{h \rightarrow 0} \int_{\Omega} w_h^k |D_k^+ u_h|^2 dx$. Суммируя по $k = 1, \dots, d$, заключаем, что $E[u] \leq \liminf_{h \rightarrow 0} E_h[u_h]$, то есть *liminf*-неравенство Γ -сходимости доказано.

Замечание о норме сходимости весов. Для *liminf*-шага достаточно $w_h^k \rightarrow w^k$ в $L^2(\Omega)$ при равномерной ограниченности w_h^k в $L^\infty(\Omega)$ и нижней границе $w_h^k \geq \varepsilon > 0$. Авторами используется более сильная сходимость в $L^\infty(\Omega)$, которая естественна для весов, порождённых сглаженным изображением.

Limsup-неравенство (восстанавливающая последовательность). Пусть сначала $u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^r)$. Определим восстановительную последовательность через стандартный оператор интерполяции на сетке: $u_h := \mathcal{I}_h u$, где \mathcal{I}_h — выбранная дискретизация (кусочно-линейная узловая интерполяция, либо кусочно-постоянная по ячейкам). Тогда $\mathcal{I}_h u \rightarrow u$ в $L^2(\Omega; \mathbb{R}^r)$, $D_k^+(\mathcal{I}_h u) \rightarrow \partial_k u$ в $L^2(\Omega; \mathbb{R}^r)$, $k = 1, \dots, d$. Используя ограниченность w_h^k и сходимость $w_h^k \rightarrow w^k$ (W2), а также сходимость дискретных сумм к интегралам, получаем $\lim_{n \rightarrow 0} E_h[u_h] = E[u]$, и, следовательно, $\limsup_{h \rightarrow 0} E_h[u_h] \leq E[u]$. Для произвольного $u \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^r)$ с $E[u] < \infty$ имеем $u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^r)$. Тем самым *limsup*-неравенство доказано для всех u с конечной предельной энергией. Это завершает доказательство Γ -сходимости энергий: $E_h \xrightarrow{\Gamma} E$ в $L^2(\Omega; \mathbb{R}^r)$.

Теорема 2 следует из Теоремы 1 применением Γ -сходимости к каждому слагаемому регуляризатора и стандартной устойчивости Γ -сходимости: к конечным суммам Γ -сходящихся функционалов; к добавлению непрерывных (в L^2) членов низшего порядка. Равнокоэрцитивность (Лемма 2) и Γ -сходимость влекут стандартный результат о сходимости почти минимизаторов [14]: если $\delta_h \downarrow 0$ и $u_h - \delta_h$ почти минимизаторы, то существует подпоследовательность и $u^* \in \text{Armin } E$ такие, что $u_h \rightarrow u^*$ в $L^2(\Omega; \mathbb{R}^r)$, а также $\liminf_{n \rightarrow 0} E_h = \inf E$, $\lim_{n \rightarrow 0} E_h[u_h] = E[u^*] = \inf E$.

Обсуждение**Основные результаты. Предложенный метод демонстрирует:**

1. Точность сегментации на уровне современных методов: $Dice = 0,912$ на *ACDC* (Таблица 3), что сопоставимо с *Deep Ensembles* (0,908) и *nnU-Net* (0,915).
2. Значительное улучшение калибровки: ECE снижен с 0,078 до 0,021 (улучшение на 73 % относительно *baseline*). Это означает, что предсказанные вероятности классов точнее отражают истинные частоты.
3. Лучшие показатели обнаружения ошибок: $AUROC = 0,891$ превосходит все сравниваемые методы (Таблица 4). Карты неопределённости эффективно идентифицируют пиксели с ошибочными предсказаниями.
4. Вычислительная эффективность: 18 % дополнительных временных расходов по сравнению с 3000 % для *MC-dropout* и 500 % для *Deep Ensembles*.

Теоретическое обоснование. Доказательство Γ -сходимости (Теорема 2) обеспечивает:

– Корректность дискретизации: дискретный функционал аппроксимирует непрерывный с контролируемой погрешностью.

– Сходимость минимизаторов: решения дискретных задач сходятся к решению непрерывной задачи.

– Обоснование масштабной инвариантности: нормировка разностей на h гарантирует нетривиальный предел весов.

Сравнение с существующими подходами.

• *Evidential Deep Learning* [5]: использует распределение Дирихле, но без пространственной регуляризации. Разработанный метод добавляет анизотропные регуляризаторы, улучшающие пространственную согласованность карт неопределённости.

• Анизотропная диффузия [25]: Классический подход к сглаживанию с сохранением границ. Настоящая работа впервые даёт строгое обоснование Γ -сходимости для *edge-aware* весов, определённых через дискретные разности.

• *Deep Ensembles* [4]: обеспечивают хорошую калибровку ценой многократного увеличения вычислительных затрат. Предложенный авторами метод достигает сопоставимого качества за один проход.

Ограничения.

1. 2D-постановка. Эксперименты проводились на 2D-срезах. Расширение на полноценные 3D-объёмы требует адаптации архитектуры и увеличения памяти.

2. *In-distribution* валидация. Все эксперименты проводились на данных из того же распределения. Поведение метода на *OOD*-данных (другие модальности, патологии, артефакты) требует отдельного исследования.

3. Условие $I \in W^{1,\infty}$. Теоретические результаты требуют ограниченности градиента изображения. На практике это обеспечивается стандартным *preprocessing* (нормализация, клиппинг).

4. Выбор гиперпараметров. Параметры η , ε , λ_m , λ_s подбираются по валидационной выборке. Автоматические методы выбора (например, байесовская оптимизация) могут улучшить результаты.

Заключение. В работе предложен вычислительный метод семантической сегментации с оценкой неопределённости, основанный на распределении Дирихле и анизотропной пространственной регуляризации. Доказана Γ -сходимость дискретных анизотропных энергий к непрерывному пределу; приведены ключевые технические леммы о нижней полунепрерывности и равнокоэрцитивности. Получено статистически значимое улучшение калибровки ($Cohen's d_2 > 2$, $p < 0,001$) при минимальных вычислительных накладных расходах (18 %). Использование нормированных конечных разностей в определении *edge-aware* весов обеспечило сходимость к нетривиальной предельной весовой функции.

Метод продемонстрировал улучшение на трёх различных наборах медицинских данных (*ACDC*, *Synapse*, *CHAOS*) с различными модальностями (МРТ, КТ) и анатомическими структурами.

Направления дальнейших исследований:

1. Расширение на 3D. Обобщение метода на трёхмерные медицинские изображения (КТ, МРТ объёмы) с соответствующей адаптацией анизотропной регуляризации.

2. Анализ *OOD*-устойчивости. Исследование поведения метода на данных вне распределения обучающей выборки, включая другие модальности, патологии и артефакты изображений.

3. Автоматический выбор гиперпараметров. Разработка методов адаптивного выбора η , λ_m , λ_s на основе свойств входного изображения.

4. Обобщение теоретических результатов. Расширение анализа Γ -сходимости на случай разрывных весов $w^k \in BV(\Omega)$, что позволит рассматривать изображения с резкими границами.

Список литературы / References

1. Begoli E., Bhattacharya T., Kusnezov D. The need for uncertainty quantification in machine-assisted medical decision making. *Nat Mach Intell.* 2019;1(1):20–23. <https://doi.org/10.1038/s42256-018-0004-1>
2. Abdar M., Pourpanah F., Hussain S., et al. A review of uncertainty quantification in deep learning: Techniques, applications and challenges. *Inf Fusion.* 2021;76:243–297. <https://doi.org/10.1016/j.inffus.2021.05.008>
3. Gal Y., Ghahramani Z. Dropout as a Bayesian approximation: representing model uncertainty in deep learning. In: *Proc. ICML*. New York: PMLR; 2016. P. 1050–1059.
4. Lakshminarayanan B., Pritzel A., Blundell C. Simple and scalable predictive uncertainty estimation using deep ensembles. In: *Advances in Neural Information Processing Systems*. 2017;30:6402–6413.

5. Sensoy M., Kaplan L., Kandemir M. Evidential deep learning to quantify classification uncertainty. In: *Advances in Neural Information Processing Systems*. 2018;31:3183–3193.
6. Malinin A., Gales M. Predictive uncertainty estimation via prior networks. In: *Advances in Neural Information Processing Systems*. 2018;31:7047–7058.
7. Jungo A., Reyes M. Assessing reliability and challenges of uncertainty estimations for medical image segmentation. In: *MICCAI 2019*. LNCS, vol. 11765. Cham: Springer; 2019. P. 48–56. https://doi.org/10.1007/978-3-030-32245-8_6
8. Nair T., Precup D., Arnold D.L., Arbel T. Exploring uncertainty measures in deep networks for multiple sclerosis lesion detection and segmentation. *Med Image Anal.* 2020;59:101557. <https://doi.org/10.1016/j.media.2019.101557>
9. Mehrtaash A., Wells W.M., Tempany C.M., Abolmaesumi P., Kapur T. Confidence calibration and predictive uncertainty estimation for deep medical image segmentation. *IEEE Trans Med Imaging.* 2020;39(12):3868–3878. <https://doi.org/10.1109/TMI.2020.3006437>
10. Li H., Nan Y., Del Ser J., Yang G. Region-based evidential deep learning to quantify uncertainty and improve robustness of brain tumor segmentation. *Neural Comput Appl.* 2023;35:22071–22085. <https://doi.org/10.1007/s00521-022-08016-4>
11. UDEL: Rethinking uncertainty dynamic estimation learning for ambiguous medical image segmentation. *Digit Signal Process.* 2025;169:105723. <https://doi.org/10.1016/j.dsp.2025.105723>
12. Yang B., Zhang X., Zhang H., et al. Structural uncertainty estimation for medical image segmentation. *Med Image Anal.* 2025;103:103602. <https://doi.org/10.1016/j.media.2025.103602>
13. Han K., Wang S., Chen J., et al., Region uncertainty estimation for medical image segmentation with noisy labels. *IEEE Trans Med Imaging.* 2025;44(12):5197–5207. <https://doi.org/10.1109/TMI.2025.3589058>
14. Dal Maso G. *An Introduction to Γ -Convergence*. Boston: Birkhäuser; 1993. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0327-8>
15. Braides A. *Γ -Convergence for Beginners*. Oxford: Oxford University Press; 2002. <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198507840.001.0001>
16. Ciarlet P.G. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. Philadelphia: SIAM; 2002. <https://doi.org/10.1137/1.9780898719208>
17. Ronneberger O., Fischer P., Brox T. U-Net: convolutional networks for biomedical image segmentation. In: *MICCAI 2015*. LNCS, vol. 9351. Cham: Springer; 2015. P. 234–241. https://doi.org/10.1007/978-3-319-24574-4_28
18. He K., Zhang X., Ren S., Sun J. Deep residual learning for image recognition. In: *Proc. CVPR*. 2016. P. 770–778. <https://doi.org/10.1109/CVPR.2016.90>
19. Kingma D.P., Ba J. Adam: a method for stochastic optimization. In: *Proc. ICLR*. 2015. arXiv:1412.6980.
20. Bernard O., Lalande A., Zotti C., et al. Deep learning techniques for automatic MRI cardiac multi-structures segmentation and diagnosis. *IEEE Trans Med Imaging.* 2018;37(11):2514–2525. <https://doi.org/10.1109/TMI.2018.2837502>
21. Landman B.A., Xu Z., Iglesias J.E., et al. MICCAI Multi-Atlas Labeling Beyond the Cranial Vault — Workshop and Challenge. <https://doi.org/10.7303/syn3193805>
22. Kavur A.E., Gezer N.S., Barış M., et al. CHAOS Challenge — combined (CT-MR) healthy abdominal organ segmentation. *Med Image Anal.* 2021;69:101950. <https://doi.org/10.1016/j.media.2020.101950>
23. Geifman Y., El-Yaniv R. Selective classification for deep neural networks. In: *Advances in Neural Information Processing Systems*. 2017;30:4878–4887.
24. Isensee F., Jaeger P.F., Kohl S.A.A. et al. nnU-Net: a self-configuring method for deep learning-based biomedical image segmentation. *Nat Methods.* 2021;18(2):203–211. <https://doi.org/10.1038/s41592-020-01008-z>
25. Perona P., Malik J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell.* 1990;12(7):629–639. <https://doi.org/10.1109/34.56205>
26. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. *Численные методы*. Москва: БИНОМ; 2012. 636 с. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. *Numerical methods*. Moscow: BINOM; 2012. 636 p.
27. Джонсон Н.Л., Котц С., Балакришнан Н. *Непрерывные одномерные распределения*. Т. 2. Нью-Йорк: Wiley; 1995. Johnson N.L., Kotz S., Balakrishnan N. *Continuous Univariate Distributions*. Vol. 2. 2nd ed. New York: Wiley; 1995. (In Russ.)
28. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач*. Москва: Наука; 1979. 288 с. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Methods for solving ill-posed problems*. Moscow: Nauka; 1979. 288 p. (In Russ.)
29. Самарский А.А. *Теория разностных схем*. Москва: Наука; 1989. 616 с. Samarsky A.A. *The theory of difference schemes*. Moscow: Nauka; 1989. 616 p. (In Russ.)
30. Chen T., Xu B., Zhang C., Guestrin C. Training deep nets with sublinear memory cost. *arXiv:1604.06174*. 2016.
31. Micikevicius P., Narang S., Alben J. et al. Mixed precision training. In: *Proc. ICLR*. 2018. arXiv:1710.03740.

Об авторах:

Евгений Юрьевич Щетинин, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных технологий Севастопольского государственного университета (Российская Федерация, 299053, г. Севастополь, ул. Университетская, 33), [ORCID](#), [SPIN-код](#), riviera-molto@mail.ru

Андрей Андреевич Шевчук, аспирант кафедры информационных технологий Севастопольского государственного университета (Российская Федерация, 299053, г. Севастополь, ул. Университетская, 33), [ORCID](#), andreiluck11@yandex.ru

Заявленный вклад авторов:

Е.Ю. Щетинин: общее научное руководство; постановка задачи; формулировка идей исследования, целей и задач, разработка методологии, получение расчетных формул и проведение численного эксперимента.

А.А. Шевчук: формулировка достигнутых результатов и описание их значимости, оформление материала статьи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Evgeny Yu. Shchetinin, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Department of Information Technologies, Sevastopol State University (33, Universitetskaya St., Sevastopol, 299053, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), riviera-molto@mail.ru

Andrey A. Shevchuk, PhD Student, Department of Information Technologies, Sevastopol State University (33, Universitetskaya St., Sevastopol, 299053, Russian Federation), [ORCID](#), andreiluck11@yandex.ru

Contributions of the authors:

E.Yu. Shchetinin: general scientific supervision; problem statement; formulation of research ideas, objectives and goals; methodology development; derivation of calculation formulas and numerical experiment.

A.A. Shevchuk: formulation of achieved results and description of their significance; manuscript preparation.

Conflict of Interest Statement: the authors declare no conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 02.02.2026

Поступила после рецензирования / Reviewed 03.03.2026

Принята к публикации / Accepted 20.03.2026

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

COMPUTATIONAL MATHEMATICS



УДК 519.6

Оригинальное эмпирическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2026-10-1-21-36>


Численное решение краевых задач с однородным линейным уравнением в частных производных модифицированным методом Бубнова-Галеркина на прямоугольнике

Н.К. Волосова¹, К.А. Волосов² , А.К. Волосова² , Н.А. Гурьева⁴, М.И. Карлов³,
Д.Ф. Пастухов⁴  , Ю.Ф. Пастухов⁴ 

¹ Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Российская Федерация

² Российский университет транспорта, г. Москва, Российская Федерация

³ Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), г. Долгопрудный, Российская Федерация

⁴ Полоцкий государственный университет им. Евфросинии Полоцкой, г. Новополоцк, Республика Беларусь

 dmitrij.pastuhov@mail.ru

Аннотация

Введение. Рассматривается численное решение краевой задачи с линейным однородным уравнением в частных производных эллиптического типа на прямоугольнике модифицированным методом Бубнова-Галеркина, причем неизвестная функция равна нулю в вершинах прямоугольника. К краевым задачам данного типа можно отнести задачи с уравнениями Пуассона и Лапласа второго порядка, бигармоническое уравнение четвертого порядка и т. д. В полученных алгоритмах допускаются уравнения не только с постоянными, но и с переменными коэффициентами на прямоугольнике. Численное решение краевой задачи записывается в функциональном виде, то есть в виде суммы координатных функций с неизвестным вектором коэффициентов разложения.

Материалы и методы. В силу ортогональности предложенных алгоритмов решения задачи невязка линейного однородного уравнения ортогональна на прямоугольнике всем координатным функциям степенного вида, начиная с функции нуль индекса, тождественно равной единице. Все координатные функции имеют единичную норму Чебышева на прямоугольнике. Обратная матрица для решения системы линейных алгебраических уравнений в краевой задаче с уравнением Пуассона на прямоугольнике вычислялась библиотекой Msimsl.

Результаты исследования. Численное решение краевой задачи с уравнением Пуассона на прямоугольнике модифицированным методом Бубнова-Галеркина показало, что равномерная норма Чебышева невязки краевой задачи имеет порядок 10^{-12} и сравнима с методом прогонки с пятидиагональной матрицей, в котором само уравнение аппроксимировано с восьмым порядком погрешности и с тем же числом узлов равномерной сетки. Однако время решения краевой задачи модифицированным методом Бубнова-Галеркина в 30 раз меньше времени решения этой же задачи методом пятидиагональной прогонки. Быстродействие — главное преимущество методов Бубнова-Галеркина для решения краевых задач с уравнениями в частных производных без заметной потери точности решения. Оптимальным числом является четырнадцать координатных функций в задаче.

Обсуждение. В работе предложены алгоритм (3)–(18) для решения общей задачи с линейным однородным уравнением в частных производных произвольного порядка m и алгоритм (19)–(26) для решения уравнения Пуассона (Лапласа) на прямоугольнике модифицированным методом Бубнова-Галеркина. Отметим, что симметрия краевых условий на этапе редукции общей задачи приводит к уменьшению числа простых задач. Впервые предложена интегральная квадратурная формула на прямоугольнике для вычисления скалярного произведения двух функций с двенадцатым порядком погрешности.





Заключение. С помощью алгоритма (28), (29) численно решены четыре примера для уравнения Пуассона на прямоугольнике, причем неизвестная функция равна нулю в вершинах прямоугольника. Построен алгоритм (5)–(19) для решения краевых задач с однородными уравнениями в частных производных эллиптического типа произвольного порядка, что показывает успешное применение модифицированного метода Бубнова-Галеркина для решения краевых задач на прямоугольнике.

Ключевые слова: численные методы, уравнения в частных производных, гидродинамика, начально-краевая задача, математическое моделирование

Для цитирования. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Гурьева Н.А. Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Численное решение краевых задач с однородным линейным уравнением в частных производных модифицированным методом Бубнова-Галеркина на прямоугольнике. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2026;10(1):21–36. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2026-10-1-21-36>

Original Empirical Research

Numerical Solution of Boundary Value Problems with a Homogeneous Linear Partial Differential Equation by a Modified Bubnov-Galerkin Method on a Rectangle

Natalya K. Volosova¹, Konstantin A. Volosov² , Aleksandra K. Volosova² , Nina A. Gurieva⁴, Mikhail I. Karlov³, Dmitriy F. Pastukhov⁴ , Yuriy F. Pastukhov⁴ 

¹ Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

² Russian University of Transport, Moscow, Russian Federation

³ Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Russian Federation

⁴ Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk, Novopolotsk, Republic of Belarus

✉ dmitrij.pastuhov@mail.ru

Abstract

Introduction. This paper considers the numerical solution of a boundary value problem with a homogeneous linear partial differential equation of elliptic type on a rectangular domain using a modified Bubnov-Galerkin method. The unknown function is assumed to be zero at the vertices of the rectangle. Boundary value problems of this type include problems governed by the second-order Poisson and Laplace equations, the fourth-order biharmonic equation, and others. The developed algorithms allow equations with both constant and variable coefficients on the rectangular domain. The numerical solution of the boundary value problem is represented in a functional form, i. e., as a sum of coordinate functions with an unknown vector of expansion coefficients.

Materials and Methods. Due to the orthogonality of the proposed solution algorithms, the residual of the homogeneous linear equation is orthogonal over the rectangular domain to all coordinate functions of polynomial type, starting from the zero-index function that is identically equal to unity. All coordinate functions possess the unit Chebyshev norm on the rectangle. The inverse matrix required for solving the system of linear algebraic equations in the boundary value problem with the Poisson equation on the rectangle was computed using the Msimsl library.

Results. The numerical solution of the boundary value problem with the Poisson equation on a rectangle using the modified Bubnov-Galerkin method shows that the uniform Chebyshev norm of the residual of the boundary value problem is of order 10^{-12} and is comparable with the sweep method for a pentadiagonal matrix, in which the equation itself is approximated with eighth-order accuracy using the same number of nodes of a uniform grid. However, the computation time of the modified Bubnov-Galerkin method is 30 times smaller than that of the pentadiagonal sweep method for solving the same problem. High computational efficiency is the main advantage of the Bubnov-Galerkin methods for solving boundary value problems with partial differential equations without a noticeable loss of accuracy. The optimal number of coordinate functions in the problem is fourteen.

Discussion. The paper proposes algorithm (3)–(18) for solving the general problem with a homogeneous linear partial differential equation of arbitrary order m , and algorithm (19)–(26) for solving the Poisson (Laplace) equation on a rectangle using the modified Bubnov-Galerkin method. It should be noted that the symmetry of boundary conditions at the stage of reduction of the general problem leads to a decrease in the number of elementary subproblems. For the first time, an integral quadrature formula on a rectangle is proposed for computing the scalar product of two functions with twelfth-order accuracy.

Conclusion. Using algorithms (28) and (29), four examples of the Poisson equation on a rectangular domain were solved numerically, where the unknown function is zero at the vertices of the rectangle. An algorithm (5)–(19) was developed for solving boundary value problems with homogeneous elliptic partial differential equations of arbitrary order, demonstrating the successful application of the modified Bubnov-Galerkin method for solving boundary value problems on a rectangular domain.

Keywords: numerical methods, partial differential equations, hydrodynamics, initial-boundary value problem, mathematical modelling

For Citation. Volosova N.K., Volosov K.A., Volosova A.K., Gurieva N.A., Karlov M.I., Pastukhov D.F., Pastukhov Yu.F. Numerical solution of boundary value problems with a homogeneous linear partial differential equation by a modified Bubnov-Galerkin method on a rectangle. *Computation Mathematics and Information Technologies*. 2026;10(1):21–36. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2026-10-1-21-36>

Введение. В работе впервые рассмотрена возможность применения модифицированного метода Бубнова-Галеркина на прямоугольнике с линейным однородным уравнением в частных производных эллиптического типа произвольного целого порядка m для решения краевой задачи в случаях, когда неизвестная функция равна нулю в вершинах прямоугольника. Методы решения краевых задач с линейными уравнениями в частных производных и классификация уравнений подробно описаны в работах [1–3]. В работах [4–10] приведены алгоритмы решения краевых задач, в том числе двумерных. В работах [11–13] предложен модифицированный метод Бубнова-Галеркина для решения краевых задач на отрезке с обыкновенным дифференциальным уравнением. В данной работе метод Бубнова-Галеркина обобщается для решения краевых задач на прямоугольнике с линейными уравнениями в частных производных с нулевым значением функции в вершинах прямоугольника.

Материалы и методы

Постановка задачи. Рассмотрим краевую задачу для однородного линейного уравнения в частных производных произвольного порядка m на прямоугольнике для функции двух переменных $u(x, y)$. Уравнение называется однородным, если каждое его слагаемое пропорционально частной производной одного и того же порядка m . К данному типу уравнений эллиптического типа, не зависящих от времени, можно отнести уравнение Лапласа ($m = 2$) [3, стр. 29], уравнение Пуассона, бигармоническое уравнение ($m = 4$) [3, стр. 80]:

$$\begin{cases} Lu(x, y) = 0, L \equiv \sum_{j=0}^m g_j(x, y) \frac{\partial^j \partial^{m-j}}{\partial x^j \partial y^{m-j}}, & x \in (a, b), y \in (c, d), \\ u|_{x=a} = \Phi_1(y), u|_{x=b} = \Phi_2(y), \\ u|_{y=c} = \Phi_3(x), u|_{y=d} = \Phi_4(x). \end{cases} \quad (1)$$

Коэффициенты линейного уравнения (1) будем считать непрерывными $g_j(x, y) \in C[a, b] \times [c, d]$ и не зависящими от неизвестной функции $u(x, y)$. Краевые условия задачи (1) — непрерывные функции, которые в вершинах прямоугольника подчинены однородным условиям согласования:

$$\Phi_1(c) = \Phi_3(a) = \Phi_1(d) = \Phi_4(a) = \Phi_2(c) = \Phi_4(b) = \Phi_2(d) = \Phi_3(b) = 0. \quad (2)$$

Выберем систему линейно-независимых функций на отрезке $[a, b]$ либо на отрезке $[c, d]$, как в работах [11–13]:

$$\phi_k(x) = \left(\frac{2x - a - b}{b - a} \right)^k \quad (k = \overline{0, n}); \quad \phi_k : x \in [a, b] \rightarrow z \in \begin{cases} [-1, 1], & k = 2l + 1, \\ [0, 1], & k = 2l, \end{cases} \quad (3)$$

$$\phi_k(y) = \left(\frac{2y - c - d}{d - c} \right)^k \quad (k = \overline{0, n}); \quad \phi_k : y \in [c, d] \rightarrow z \in \begin{cases} [-1, 1], & k = 2l + 1, \\ [0, 1], & k = 2l. \end{cases} \quad (4)$$

В силу линейности (1) можно провести редукцию краевой задачи (1), то есть представить ее решение в виде $u(x, y) = u^1(x, y) + u^2(x, y) + u^3(x, y) + u^4(x, y)$, где:

$$\begin{cases} Lu^1(x, y) = 0, x \in (a, b), y \in (c, d), \\ u^1|_{x=a} = \Phi_1(y), u^1|_{x=b} = 0, \Phi_1(c) = \Phi_1(d) = 0, \\ u^1|_{y=c} = 0, u^1|_{y=d} = 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\begin{cases} Lu^2(x, y) = 0, x \in (a, b), y \in (c, d), \\ u^2|_{x=a} = 0, u^2|_{x=b} = \Phi_2(y), \Phi_2(c) = \Phi_2(d) = 0, \\ u^2|_{y=c} = 0, u^2|_{y=d} = 0, \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\begin{cases} Lu^3(x, y) = 0, x \in (a, b), y \in (c, d), \\ u^3|_{x=a} = 0, u^3|_{x=b} = 0, \Phi_3(a) = \Phi_3(b) = 0, \\ u^3|_{y=c} = \Phi_3(x), u^3|_{y=d} = 0, \end{cases} \quad (5.3)$$

$$\begin{cases} Lu^4(x, y) = 0, x \in (a, b), y \in (c, d), \\ u^4|_{x=a} = 0, u^4|_{x=b} = 0, \Phi_4(a) = \Phi_4(b) = 0, \\ u^4|_{y=c} = 0, u^4|_{y=d} = \Phi_4(x). \end{cases} \quad (5.4)$$

Решение задачи (5.1) ищем в виде

$$u^1(x, y) = \Phi_1(y)X_1(x) = \Phi_1(y)\sum_{k=0}^n C_k^1 \phi_k(x) \quad (6)$$

с неизвестным вектором весовых коэффициентов разложения C_k^1 .

Учитывая явный вид оператора в частных производных в задаче (1), подставим разложение решения задачи (6) в систему уравнений (5.1):

$$\sum_{j=0}^m g_j(x, y) \frac{\partial^j \partial^{m-j}}{\partial x^j \partial y^{m-j}} \left[\Phi_1(y) \sum_{k=0}^n C_k^1 \phi_k(x) \right] = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n C_k^1 \sum_{j=0}^k g_j(x, y) \Phi_1^{(m-j)}(y) \phi_k^{(j)}(x) = 0.$$

В последней сумме множество индексов $0 \leq j \leq k$ объясняется тем, что для координатных функций степенного вида производные равны

$$\phi_k^{(j)}(x) = \begin{cases} \left(\frac{2}{b-a} \right)^j k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-j+1) \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right)^{k-j}, & j \leq k \\ 0, & j > k \end{cases} \quad (7.1)$$

Аналогично,

$$\phi_k^{(j)}(y) = \begin{cases} \left(\frac{2}{d-c} \right)^j k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-j+1) \left(\frac{2y-c-d}{d-c} \right)^{k-j}, & j \leq k \\ 0, & j > k \end{cases} \quad (7.2)$$

Умножим последнее уравнение на координатную функцию $\phi_i(x)$ и потребуем, согласно методу Бубнова-Галеркина, ортогональности невязки уравнения всем координатным функциям $\phi_i(x)$, $i = 0, n-2$. В данном случае невязка совпадает с левой частью последнего уравнения. После скалярного умножения функций в метрике функционального пространства L_2 получим:

$$\sum_{k=0}^n C_k^1 \left\langle \sum_{j=0}^k g_j(x, y) \Phi_1^{(m-j)}(y) \phi_k^{(j)}(x), \phi_i(x) \right\rangle = 0. \quad (8)$$

Решение задачи (5.1) следует рассматривать на множестве допустимых функций с использованием краевых условий (5.1), то есть

$$u^1(a, y) = \Phi_1(y) \sum_{k=0}^n C_k^1 \phi_k(a) = \Phi_1(y) \sum_{k=0}^n C_k^1 (-1)^k = \Phi_1(y) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n C_k^1 (-1)^k = 1,$$

$$u^1(b, y) = \Phi_1(y) \sum_{k=0}^n C_k^1 \phi_k(b) = \Phi_1(y) \sum_{k=0}^n C_k^1 (1)^k = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n C_k^1 = 0,$$

$$u^1(x, c) = \Phi_1(c) \sum_{k=0}^n C_k^1 \phi_k(x) = 0 \Leftrightarrow \Phi_1(c) = 0, u^1(x, d) = \Phi_1(d) \sum_{k=0}^n C_k^1 \phi_k(x) = 0 \Leftrightarrow \Phi_1(d) = 0.$$

Получим $n+1$ систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных коэффициентов C_k^1 :

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n A_{i,k}^1 C_k^1 = f_i^1, & i = \overline{0, n}, \\ A_{i,k}^1 = \left\langle \sum_{j=0}^k g_j(x, y) \Phi_1^{(m-j)}(y) \phi_k^{(j)}(x), \phi_i(x) \right\rangle, & i = \overline{0, n-2}, k = \overline{0, n}, \\ A_{n-1,k}^1 = (-1)^k, & k = \overline{0, n}; \quad A_{n,k}^1 = 1, & k = \overline{0, n}, \\ f_i^1 = 0, & i = \overline{0, n-2}, \quad f_{n-1}^1 = 1, \quad f_n^1 = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Неоднородность СЛАУ обеспечивает коэффициент $f_{n-1}^1 = 1$ в правой части (9).

В классических методах уравнений математической физики решение краевой задачи раскладывают по собственным функциям однородной краевой задачи, при этом каждая собственная функция удовлетворяет однородным краевым условиям. Условия однородности для каждой собственной функции $\phi_k(x)$ являются достаточными, чтобы вся сумма вида (6) на концах отрезка $x = a$, $x = b$ обращалась в нуль, но не являются необходимыми условиями. Необходимыми условиями в данной задаче являются $\sum_{k=0}^n C_k^1 (-1)^k = 1$ и $\sum_{k=0}^n C_k^1 = 0$.

Аналогично, для задачи (5.2) получим решение вида:

$$u^2(x, y) = \Phi_2(y)X_2(x) = \Phi_2(y)\sum_{k=0}^n C_k^2 \phi_k(x), \quad (10)$$

с неизвестным вектором весовых коэффициентов разложения C_k^2 и СЛАУ:

$$u^2(a, y) = \Phi_2(y) \sum_{k=0}^n C_k^2 \phi_k(a) = \Phi_2(y) \sum_{k=0}^n C_k^2 (-1)^k = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n C_k^2 (-1)^k = 0,$$

$$\begin{aligned}
 u^2(b, y) &= \Phi_2(y) \sum_{k=0}^n C_k^2 \phi_k(b) = \Phi_2(y) \sum_{k=0}^n C_k^2 (1)^k = \Phi_2(y) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n C_k^2 = 1, \\
 u^2(x, c) &= \Phi_2(c) \sum_{k=0}^n C_k^2 \phi_k(x) = 0 \Leftrightarrow \Phi_2(c) = 0, u^2(x, d) = \Phi_2(d) \sum_{k=0}^n C_k^2 \phi_k(x) = 0 \Leftrightarrow \Phi_2(d) = 0, \\
 &\begin{cases} \sum_{k=0}^n A_{i,k}^2 C_k^2 = f_i^2, i = \overline{0, n}, \\ A_{i,k}^2 = \left\langle \sum_{j=0}^k g_j(x, y) \Phi_1^{(m-j)}(y) \phi_k^{(j)}(x), \phi_i(x) \right\rangle, i = \overline{0, n-2}, k = \overline{0, n}, \\ A_{n-1,k}^2 = (-1)^k, k = \overline{0, n}; A_{n,k}^2 = 1, k = \overline{0, n}, \\ f_i^2 = 0, i = \overline{0, n-2}, f_{n-1}^2 = 0, f_n^2 = 1. \end{cases} \quad (11)
 \end{aligned}$$

Для решения задачи (5.3) имеем разложение решения по неизвестному вектору коэффициентов C_k^3 :

$$u^3(x, y) = \Phi_3(x) Y_3(y) = \Phi_3(x) \sum_{k=0}^n C_k^3 \phi_k(y) \quad (12)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned}
 u^3(x, c) &= \Phi_3(x) \sum_{k=0}^n C_k^3 \phi_k(c) = \Phi_3(x) \sum_{k=0}^n C_k^3 (-1)^k = \Phi_3(x) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n C_k^3 (-1)^k = 1, \\
 u^3(x, d) &= \Phi_3(x) \sum_{k=0}^n C_k^3 \phi_k(d) = \Phi_3(x) \sum_{k=0}^n C_k^3 (1)^k = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n C_k^3 = 0, \\
 u^3(a, y) &= \Phi_3(a) \sum_{k=0}^n C_k^3 \phi_k(y) = 0 \Leftrightarrow \Phi_3(a) = 0, u^3(b, y) = \Phi_3(b) \sum_{k=0}^n C_k^3 \phi_k(y) = 0 \Leftrightarrow \Phi_3(b) = 0
 \end{aligned}$$

и системой линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n A_{i,k}^3 C_k^3 = f_i^3, i = \overline{0, n}, \\ A_{i,k}^3 = \left\langle \sum_{j=m-k}^m g_j(x, y) \Phi_3^{(j)}(x) \phi_k^{(m-j)}(y), \phi_i(y) \right\rangle, i = \overline{0, n-2}, k = \overline{0, n}, \\ A_{n-1,k}^3 = (-1)^k, k = \overline{0, n}; A_{n,k}^3 = 1, k = \overline{0, n}, \\ f_i^3 = 0, i = \overline{0, n-2}, f_{n-1}^3 = 1, f_n^3 = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Аналогично для задачи (5.4) разложим решение по базисным функциям с вектором весовых коэффициентов C_k^4 :

$$u^4(x, y) = \Phi_4(x) Y_4(y) = \Phi_4(x) \sum_{k=0}^n C_k^4 \phi_k(y) \quad (14)$$

с краевыми условиями (множество допустимых функций)

$$\begin{aligned}
 u^4(x, c) &= \Phi_4(x) \sum_{k=0}^n C_k^4 \phi_k(c) = \Phi_4(x) \sum_{k=0}^n C_k^4 (-1)^k = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n C_k^4 (-1)^k = 0, \\
 u^4(x, d) &= \Phi_4(x) \sum_{k=0}^n C_k^4 \phi_k(d) = \Phi_4(x) \sum_{k=0}^n C_k^4 (1)^k = \Phi_4(x) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n C_k^4 = 1, \\
 u^4(a, y) &= \Phi_4(a) \sum_{k=0}^n C_k^4 \phi_k(y) = 0 \Leftrightarrow \Phi_4(a) = 0, u^4(b, y) = \Phi_4(b) \sum_{k=0}^n C_k^4 \phi_k(y) = 0 \Leftrightarrow \Phi_4(b) = 0
 \end{aligned}$$

и системой линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n A_{i,k}^4 C_k^4 = f_i^4, i = \overline{0, n}, \\ A_{i,k}^4 = \left\langle \sum_{j=m-k}^m g_j(x, y) \Phi_4^{(j)}(x) \phi_k^{(m-j)}(y), \phi_i(y) \right\rangle, i = \overline{0, n-2}, k = \overline{0, n}, \\ A_{n-1,k}^4 = (-1)^k, k = \overline{0, n}; A_{n,k}^4 = 1, k = \overline{0, n}, \\ f_i^4 = 0, i = \overline{0, n-2}, f_{n-1}^4 = 0, f_n^4 = 1. \end{cases} \quad (15)$$

Общее решение задачи (1) представимо в виде

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u^1(x, y) + u^2(x, y) + u^3(x, y) + u^4(x, y) = \\ &= \Phi_1(y) \sum_{k=0}^n C_k^1 \phi_k(x) + \Phi_2(y) \sum_{k=0}^n C_k^2 \phi_k(x) + \Phi_3(x) \sum_{k=0}^n C_k^3 \phi_k(y) + \Phi_4(x) \sum_{k=0}^n C_k^4 \phi_k(y) = \\ &= \sum_{k=0}^n (C_k^1 \Phi_1(y) + C_k^2 \Phi_2(y)) \phi_k(x) + \sum_{k=0}^n (C_k^3 \Phi_3(x) + C_k^4 \Phi_4(x)) \phi_k(y). \end{aligned} \quad (16)$$

Замечание. Если краевые функции на противоположных сторонах прямоугольника равны друг другу $\Phi_1(y) = \Phi_2(y)$, $\Phi_3(x) = \Phi_4(x)$, то, обозначая сумму коэффициентов разложения $C_k^1 + C_k^2 = C_k^*$, $k = \overline{0, n}$, $C_k^3 + C_k^4 = C_k^{**}$, $k = \overline{0, n}$ и складывая уравнения, содержащие $C_k^1, C_k^2, C_k^3, C_k^4$ в системах (9), (11) и (13), (15), получим две системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n A_{i,k}^* C_k^* = f_i^*, \quad i = \overline{0, n}, \\ A_{i,k}^* = \left\langle \sum_{j=0}^k g_j(x, y) \Phi_1^{(m-j)}(y) \phi_k^{(j)}(x), \phi_i(x) \right\rangle, \quad i = \overline{0, n-2}, \quad k = \overline{0, n}, \\ A_{n-1,k}^* = (-1)^k, \quad k = \overline{0, n}; \quad A_{n,k}^* = 1, \quad k = \overline{0, n}, \\ f_i^* = 0, \quad i = \overline{0, n-2}, \quad f_{n-1}^* = 1, \quad f_n^* = 1, \end{cases} \quad (17.1)$$

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n A_{i,k}^{**} C_k^{**} = f_i^{**}, \quad i = \overline{0, n}, \\ A_{i,k}^{**} = \left\langle \sum_{j=m-k}^m g_j(x, y) \Phi_3^{(j)}(x) \phi_k^{(m-j)}(y), \phi_i(y) \right\rangle, \quad i = \overline{0, n-2}, \quad k = \overline{0, n}, \\ A_{n-1,k}^{**} = (-1)^k, \quad k = \overline{0, n}; \quad A_{n,k}^{**} = 1, \quad k = \overline{0, n}, \\ f_i^{**} = 0, \quad i = \overline{0, n-2}, \quad f_{n-1}^{**} = 1, \quad f_n^{**} = 1. \end{cases} \quad (17.2)$$

Решение по общей формуле (16) перейдет в упрощенную формулу:

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^n (C_k^* \Phi_1(y) \phi_k(x) + C_k^{**} \Phi_3(x) \phi_k(y)). \quad (18)$$

Отметим, что в системах линейных алгебраических уравнений (9), (11), (13), (15) скалярное произведение двух функций на прямоугольнике находится с помощью весовой матрицы для двумерной квадратурной интегральной формулы с двенадцатым порядком погрешности. Одномерный вариант весовых коэффициентов применялся в работах [11–13]:

$$\begin{aligned} \langle f_1, f_2 \rangle &= \int_a^b \int_c^d f_1(x, y) f_2(x, y) dx dy = 25 h_1 h_2 \sum_{i=0}^{n_2} \sum_{j=0}^{n_1} C_{i,j} f_1(x_j, y_i) f_2(x_j, y_i) + \\ &+ O(h_1^{12} + h_2^{12}), \quad C_{i,j} = C_i^2 \cdot C_j^1, \quad i = \overline{0, n_2}, \quad j = \overline{0, n_1}, \\ x_j &= a + j h_1, \quad y_i = c + i h_2, \quad n_1 = 10 p_1, \quad n_2 = 10 p_2, \quad h_1 = \frac{b-a}{n_1}, \quad h_2 = \frac{d-c}{n_2}, \quad p_1, p_2 \in N, \end{aligned}$$

где

$$C_i^k = \begin{cases} \frac{16067}{299376}, \text{ если } i = 0 \text{ или } i = n_k, \quad k = 1, 2, \quad (i = \overline{0, n_k}), \\ \frac{16067}{149688}, \text{ если } (i \equiv 0 \pmod{10}) \text{ и } (0 < i < n_k), \\ \frac{26575}{74844}, \text{ если } (i \equiv 1 \pmod{10}) \text{ или } (i \equiv 9 \pmod{10}), \\ \frac{-16175}{99792}, \text{ если } (i \equiv 2 \pmod{10}) \text{ или } (i \equiv 8 \pmod{10}), \\ \frac{5675}{6237}, \text{ если } (i \equiv 3 \pmod{10}) \text{ или } (i \equiv 7 \pmod{10}), \\ \frac{-4825}{5544}, \text{ если } (i \equiv 4 \pmod{10}) \text{ или } (i \equiv 6 \pmod{10}), \\ \frac{17807}{12474}, \text{ если } i \equiv 5 \pmod{10}. \end{cases} \quad (19)$$

Рассмотрим численное решение уравнения Пуассона на прямоугольнике (пример взят из работы [14]), используя полученный алгоритм решения общей задачи (1):

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \sin x, 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = \sin y, 0 \leq x \leq \pi, \\ u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = \sin x, 0 \leq y \leq \pi. \end{cases} \quad (20)$$

Приведенный пример (20) имеет точное аналитическое решение [14, стр. 64]:

$$u(x, y) = \left(\left(\frac{1 - \operatorname{ch} \pi}{\operatorname{sh} \pi} \right) \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x \right) \sin y + \left(\left(\frac{1 - \operatorname{ch} \pi}{\operatorname{sh} \pi} \right) \operatorname{sh} y + \operatorname{ch} y \right) \sin x + \left(-1 + \left(\frac{1 - \operatorname{ch} \pi}{\operatorname{sh} \pi} \right) \operatorname{sh} y + \operatorname{ch} y \right) \sin x. \quad (21)$$

Для уравнения Пуассона коэффициенты уравнения в частных производных в задаче (1) равны $g_0(x, y) \equiv 1, g_1(x, y) \equiv 0, g_2(x, y) \equiv 1$. Численное решение примера 1 с учетом замечания для равенства краевых условий на противоположных сторонах прямоугольника, а также равенства правой части уравнения Пуассона второму краевому условию (функции $\sin x$) разобьем на две части. Исходную задачу (20) сводим к двум более простым, где первая задача имеет вид:

$$\begin{cases} u^1_{xx} + u^1_{yy} = \sin x, 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, \\ u^1|_{x=0} = u^1|_{x=\pi} = 0, 0 \leq x \leq \pi, \\ u^1|_{y=0} = u^1|_{y=\pi} = \sin x, 0 \leq y \leq \pi, \end{cases} \quad (22)$$

$$u^1(x, y) = \sin x \cdot \sum_{k=0}^n C_k^1 \phi_k(y)$$

с краевыми условиями

$$y = 0: \sum_{k=0}^n C_k^1 (-1)^k = 1, \quad y = \pi: \sum_{k=0}^n C_k^1 = 1.$$

Подставим решение $u^1(x, y)$ в уравнение Лапласа

$$-\sin x \cdot \sum_{k=0}^n C_k^1 \phi_k''(y) + \sin x \cdot \sum_{k=2}^n C_k^1 \phi_k''(y) = \sin x \Leftrightarrow -C_0^1 - C_1^1 \phi_1 + \sum_{k=2}^n C_k^1 (\phi_k'' - \phi_k) = 1,$$

умножая скалярно последнее уравнение на базисную функцию $\phi_i(y), i = \overline{0, n-2}$, получим:

$$\begin{aligned} -C_0^1 \langle 1, \phi_i \rangle - C_1^1 \langle \phi_1, \phi_i \rangle + \sum_{k=2}^n C_k^1 \langle \phi_k'' - \phi_k, \phi_i \rangle &= \langle 1, \phi_i \rangle, i = \overline{0, n-2} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n A_{i,k}^1 C_k^1 = f_i^1, i = \overline{0, n}, \\ A_{i,k}^1 &= \langle \phi_k'' - \phi_k, \phi_i \rangle, i = \overline{0, n-2}, k = \overline{2, n}; A_{i,0}^1 = -\langle 1, \phi_i \rangle, i = \overline{0, n-2}, k = 0; A_{i,1}^1 = -\langle \phi_1, \phi_i \rangle, i = \overline{0, n-2}, k = 1, \\ f_i^1 &= \langle 1, \phi_i \rangle, i = \overline{0, n-2}, f_{n-1}^1 = f_n^1 = 1. \end{aligned} \quad (23)$$

Если определитель матрицы $A_{i,k}^1; i, k = \overline{0, n}$ отличен от нуля, то существует единственное решение СЛАУ (22) $C^1 = (A^1)^{-1} f^1$.

Вторую подзадачу для решения задачи (20) запишем в виде:

$$\begin{cases} u^2_{xx} + u^2_{yy} = 0, 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, \\ u^2|_{x=0} = u^2|_{x=\pi} = \sin y, 0 \leq x \leq \pi, \\ u^2|_{y=0} = u^2|_{y=\pi} = 0, 0 \leq y \leq \pi, \end{cases} \quad (24)$$

$$u^2(x, y) = \sin y \cdot \sum_{k=0}^n C_k^2 \phi_k(x)$$

с краевыми условиями

$$x = 0: \sum_{k=0}^n C_k^2 (-1)^k = 1, \quad x = \pi: \sum_{k=0}^n C_k^2 = 1.$$

Подставим решение $u^2(x, y)$ в уравнение Лапласа:

$$\sin y \cdot \sum_{k=2}^n C_k^2 \phi_k''(x) - \sin y \cdot \sum_{k=0}^n C_k^2 \phi_k''(x) = 0 \Leftrightarrow -C_0^2 - C_1^2 \phi_1 + \sum_{k=2}^n C_k^2 (\phi_k'' - \phi_k) = 0,$$

умножая скалярно последнее уравнение на базисную функцию $\phi_i(x), i = \overline{0, n-2}$, получим:

$$-C_0^2 \langle 1, \phi_i \rangle - C_1^2 \langle \phi_1, \phi_i \rangle + \sum_{k=2}^n C_k^2 \langle \phi_k^* - \phi_k, \phi_i \rangle = 0, i = \overline{0, n-2} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n A_{i,k}^2 C_k^2 = f_i^2, i = \overline{0, n},$$

$$A_{i,k}^2 = \langle \phi_k^* - \phi_k, \phi_i \rangle, i = \overline{0, n-2}, k = \overline{2, n}; A_{i,0}^2 = -\langle 1, \phi_i \rangle, i = \overline{0, n-2}, k = 0; A_{i,1}^2 = -\langle \phi_1, \phi_i \rangle, i = \overline{0, n-2}, k = 1, \quad (25)$$

$$f_i^2 = 0, i = \overline{0, n-2}, f_{n-1}^2 = f_n^2 = 1.$$

Вектор коэффициентов разложения найдем по формуле $C^2 = (A^2)^{-1} f^2$.

Окончательно численное решение задачи (20) представимо в виде суммы решений задач (22), (24):

$$u(x, y) = u^1(x, y) + u^2(x, y) = \sin x \cdot \sum_{k=0}^n C_k^1 \phi_k(y) + \sin y \cdot \sum_{k=0}^n C_k^2 \phi_k(x). \quad (26)$$

Таблица 1

Результаты работы программы с числом базисных функций 14 ($n = 13$)

x_j	y_i	$u^{exact}(x_j, y_i)$	$u^{num}(x_j, y_i)$
0,0000000000E+000	0,0000000000E+000	0,000000000E+000	0,00000000E+000
0,785398163397448	0,0000000000E+000	0,707106781186547	0,707106781188
1,57079632679490	0,0000000000E+000	1,000000000000000	1,000000000002
2,35619449019234	0,0000000000E+000	0,707106781186548	0,707106781188
3,14159265358979	0,0000000000E+000	1,22460635382-016	1,224606353E-016
0,392699081698724	0,392699081698724	0,430835084394819	0,4308350843945
1,17809724509617	0,392699081698724	0,549883843264189	0,549883843263
1,96349540849362	0,392699081698724	0,549883843264189	0,549883843263
2,74889357189107	0,392699081698724	0,430835084394819	0,4308350843945
0,000000000E+000	0,78539816339744	0,70710678118654	0,707106781188
0,785398163397448	0,785398163397448	0,412749869982035	0,412749869984
1,57079632679490	0,785398163397448	0,337619060675814	0,337619060678
2,35619449019234	0,785398163397448	0,412749869982035	0,412749869984
3,14159265358979	0,785398163397448	0,707106781186547	0,707106781188
0,392699081698724	1,17809724509617	0,600835882782445	0,600835882781
1,17809724509617	1,17809724509617	0,266992276932959	0,266992276929
1,96349540849362	1,17809724509617	0,266992276932959	0,266992276929
2,74889357189107	1,17809724509617	0,600835882782445	0,600835882781
0,0000000000E+000	1,57079632679490	1,000000000000000	1,000000000002
0,785398163397448	1,57079632679490	0,384414876168756	0,384414876171
1,57079632679490	1,57079632679490	0,195610446015160	0,195610446018
2,35619449019234	1,57079632679490	0,384414876168756	0,384414876171
3,14159265358979	1,57079632679490	1,000000000000000	1,0000000000028
0,392699081698724	1,96349540849362	0,600835882782446	0,600835882781
1,17809724509617	1,96349540849362	0,266992276932960	0,266992276929
1,96349540849362	1,96349540849362	0,266992276932960	0,266992276929
2,74889357189107	1,96349540849362	0,600835882782445	0,600835882781
0,0000000000E+000	2,35619449019234	0,707106781186548	0,707106781188
0,785398163397448	2,35619449019234	0,412749869982035	0,412749869984
1,57079632679490	2,35619449019234	0,337619060675815	0,337619060678
2,35619449019234	2,35619449019234	0,412749869982035	0,412749869984
3,14159265358979	2,35619449019234	0,707106781186548	0,707106781188
0,392699081698724	2,74889357189107	0,430835084394819	0,4308350843945
1,17809724509617	2,74889357189107	0,549883843264188	0,549883843263
1,96349540849362	2,74889357189107	0,549883843264188	0,549883843263
2,74889357189107	2,74889357189107	0,430835084394819	0,4308350843945
0,000000000000E+000	3,14159265358979	1,2246063538E-016	1,224606353E-016
0,785398163397448	3,14159265358979	0,707106781186548	0,707106781188
1,57079632679490	3,14159265358979	1,000000000000000	1,00000000000272
2,35619449019234	3,14159265358979	0,707106781186548	0,707106781188
3,14159265358979	3,14159265358979	2,4492127076E-016	2,4492127076E-016

В первом и втором столбцах таблицы записаны координаты узловых точек прямоугольника, в третьем и четвертом столбцах точное (по формуле (21)) и численное (по формуле (26)) решения задачи (20) на равномерной сетке $x_j = a + jh_1, y_i = c + ih_2, j = \overline{0, n_1}, i = \overline{0, n_2}, h_1 = \frac{b-a}{n_1}, h_2 = \frac{d-c}{n_2}, n_1 = n_2 = 40$. В пространстве дискретных функций с равномерной нормой невязка решения примера (20) равна $\|u^{exact} - u^{num}\|_C = \max_{j=0, n_1, i=0, n_2} |u_{i,j}^{exact} - u_{i,j}^{num}| = 3,764766276503906E - 012$.

В работе [14] уравнение Пуассона на прямоугольнике аппроксимируется с восьмым порядком погрешности. Полученное разностное уравнение в краевой задаче (20) решается методом прогонки с пятидиагональной матрицей и методом простой итерации. С помощью программы при аналогичных параметрах $n_1 = 40$ ($n = 80$); $n_2 = 40$ ($n_1 = 40$), ($m = 20000$) (в скобках указаны параметры программы в статье [14]) получим, что

$$\|u^{exact} - u^{num}\|_C = \max_{j=0, n_1, i=0, n_2} |u_{i,j}^{exact} - u_{i,j}^{num}| = 7,355227538141662E - 013.$$

На языке Fortran с использованием библиотеки dfmsl можно записывать момент начала (call cru_time(t1)) и окончания (call cru_time(t2)) работы программы. Используя программу из статьи [14] получим время работы $t_2 - t_1 = 2,125$ секунды. Время работы программы с алгоритмом (19)–(26) в данной работе равно $t_2 - t_1 = 7,8125E - 002$, то есть в 27,2 (в десятки) раз меньше, чем в работе [14] при сопоставимой точности решения задач в равномерной метрике.

Рассмотрим однородную краевую задачу Дирихле (27) на прямоугольнике для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \sin x \cdot \sin y = f_1(x)f_2(y), f_1(0) = f_1(\pi) = 0, 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, 0 \leq x \leq \pi, \\ u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0, 0 \leq y \leq \pi \end{cases} \quad (27)$$

с точным решением

$$u(x, y) = \frac{-\sin x \sin y}{2} : u_{xx} + u_{yy} = \frac{\sin x \sin y}{2} + \frac{\sin x \sin y}{2} = \sin x \sin y,$$

$$u(x, y) = f_1(x) \sum_{k=0}^n C_k \phi_k(y) = \sin x \cdot \sum_{k=0}^n C_k \phi_k(y)$$

и краевыми условиями

$$\begin{aligned} u(x, c) = f_1(x) \sum_{k=0}^n C_k \phi_k(c) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n C_k (-1)^k = 0, \quad u(x, d) = f_1(x) \sum_{k=0}^n C_k \phi_k(d) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n C_k^1 = 0, \\ u(0, y) = \sin 0 \cdot \sum_{k=0}^n C_k \phi_k(y) = 0, \quad u(\pi, y) = \sin \pi \cdot \sum_{k=0}^n C_k \phi_k(y) = 0. \end{aligned}$$

Подставим решение $u(x, y)$ в уравнение Лапласа:

$$f_1''(x) \cdot \sum_{k=0}^n C_k \phi_k(y) + f_1(x) \cdot \sum_{k=2}^n C_k \phi_k''(y) = f_1(x) f_2(y).$$

Умножая скалярно последнее уравнение на базисную функцию $\phi_i(y), i = \overline{0, n-2}$, в общем случае получим:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n C_k \langle f_1''(x) \phi_k(y), \phi_i(y) \rangle + \sum_{k=2}^n C_k \langle f_1(x) \phi_k''(y), \phi_i(y) \rangle &= \langle f_1(x) f_2(y), \phi_i(y) \rangle \Leftrightarrow \\ C_0 \langle f_1''(x), \phi_i \rangle + C_1 \langle \phi_1 f_1''(x), \phi_i \rangle + \sum_{k=2}^n C_k \langle f_1(x) \phi_k'' + \phi_k f_1''(x), \phi_i \rangle &= \langle f_1(x) f_2(y), \phi_i(y) \rangle, i = \overline{0, n-2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n A_{i,k} C_k = f_i, i = \overline{0, n}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{cases} A_{i,k} = \langle f_1(x) \phi_k''(y) + \phi_k(y) f_1''(x), \phi_i(y) \rangle, i = \overline{0, n-2}, k = \overline{2, n}, \\ A_{i,0} = \langle f_1''(x), \phi_i(y) \rangle, i = \overline{0, n-2}, k = 0; A_{i,1} = \langle \phi_1(y) f_1''(x), \phi_i(y) \rangle, i = \overline{0, n-2}, k = 1, \\ A_{n-1,k} = (-1)^k, A_{n,k} = 1, k = \overline{0, n}, \\ f_i = \langle f_1(x) f_2(y), \phi_i(y) \rangle, i = \overline{0, n-2}, f_{n-1} = f_n = 0. \end{cases}$$

Для примера (27) из (28) получим:

$$\begin{aligned} -\sin x \cdot \sum_{k=0}^n C_k \phi_k(y) + \sin x \cdot \sum_{k=2}^n C_k \phi_k''(y) = \sin x \sin y &\Leftrightarrow -C_0 - C_1 \phi_1 + \sum_{k=2}^n C_k (\phi_k'' - \phi_k) = f_2(y) = \sin y, \\ -C_0 \langle 1, \phi_i \rangle - C_1 \langle \phi_1, \phi_i \rangle + \sum_{k=2}^n C_k \langle \phi_k'' - \phi_k, \phi_i \rangle &= \langle \sin y, \phi_i \rangle, i = \overline{0, n-2} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n A_{i,k} C_k = f_i, i = \overline{0, n}, \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^n A_{i,k} C_k = f_i, i = \overline{0, n}, \quad (29)$$

$$A_{i,k} = \langle \phi_k^* - \phi_k, \phi_i \rangle, i = \overline{0, n-2}, k = \overline{2, n}; A_{i,0} = -\langle 1, \phi_i \rangle, i = \overline{0, n-2}, k = 0; A_{i,1} = -\langle \phi_1, \phi_i \rangle, i = \overline{0, n-2}, k = 1,$$

$$A_{n-1,k} = (-1)^k, A_{n,k} = 1, k = \overline{0, n}, f_i = \langle \sin y, \phi_i \rangle, i = \overline{0, n-2}, f_{n-1} = f_n = 0.$$

Существует единственное решение СЛАУ (27): $u(x, y) = \sin x \cdot \sum_{k=0}^n C_k \phi_k(y)$, $C = (A)^{-1} f$.

Таблица 2

Результаты работы программы в примере (27) с 14 базисными функциями

x_j	y_i	$u^{exact}(x_j, y_i)$	$u^{num}(x_j, y_i)$
0,0000000000E+000	0,0000000000E+000	0,0000000000E+000	0,0000000000E+000
0,0000000000E+000	0,0000000000E+000	0,0000000000E+000	0,0000000000E+000
0,628318530717959	0,0000000000E+000	0,0000000000E+000	-2,8151350900E-013
1,25663706143592	0,0000000000E+000	0,0000000000E+000	-4,5549842585E-013
1,88495559215388	0,0000000000E+000	0,0000000000E+000	-4,5549842585E-013
2,51327412287183	0,0000000000E+000	0,0000000000E+000	-2,8151350900E-013
3,14159265358979	0,0000000000E+000	0,0000000000E+000	-5,8651221762E-029
0,0000000000E+000	0,628318530717959	0,0000000000E+000	0,0000000000E+000
0,628318530717959	0,628318530717959	-0,172745751406263	-0,172745751406184
1,25663706143592	0,628318530717959	-0,279508497187474	-0,279508497187345
1,88495559215388	0,628318530717959	-0,279508497187474	-0,279508497187345
2,51327412287183	0,628318530717959	-0,172745751406263	-0,172745751406184
3,14159265358979	0,628318530717959	-3,5990277732E-017	-3,5990277732E-017
0,0000000000E+000	1,25663706143592	0,0000000000E+000	0,0000000000E+000
0,628318530717959	1,25663706143592	-0,279508497187474	-0,279508497188230
1,25663706143592	1,25663706143592	-0,452254248593737	-0,452254248594961
1,88495559215388	1,25663706143592	-0,452254248593737	-0,452254248594961
2,51327412287183	1,25663706143592	-0,279508497187474	-0,279508497188230
3,14159265358979	1,25663706143592	-5,8233492634E-017	-5,8233492635E-017
0,0000000000E+000	1,88495559215388	0,0000000000E+000	0,0000000000E+000
0,628318530717959	1,88495559215388	-0,279508497187474	-0,279508497188234
1,25663706143592	1,88495559215388	-0,452254248593737	-0,452254248594967
1,88495559215388	1,88495559215388	-0,452254248593737	-0,452254248594967
2,51327412287183	1,88495559215388	-0,279508497187474	-0,279508497188234
3,14159265358979	1,88495559215388	-5,8233492634E-017	-5,8233492635E-017
0,0000000000E+000	2,51327412287183	0,0000000000E+000	0,0000000000E+000
0,628318530717959	2,51327412287183	-0,172745751406263	-0,172745751406185
1,25663706143592	2,51327412287183	-0,279508497187474	-0,279508497187347
1,88495559215388	2,51327412287183	-0,279508497187474	-0,279508497187347
2,51327412287183	2,51327412287183	-0,172745751406263	-0,172745751406185
3,14159265358979	2,51327412287183	-3,5990277732E-017	-3,5990277732E-017
0,0000000000E+000	3,14159265358979	0,0000000000E+000	0,0000000000E+000
0,628318530717959	3,14159265358979	-3,59902777320E-017	-2,8152623432E-013
1,25663706143592	3,14159265358979	-5,8233492634E-017	-4,5551901586E-013
1,88495559215388	3,14159265358979	-5,8233492634E-017	-4,5551901586E-013
2,51327412287183	3,14159265358979	-3,59902777320E-017	-2,8152623432E-013
3,14159265358979	3,14159265358979	-7,49830360911E-033	-5,8653872988E-029

Программа для примера (27) с уравнением Пуассона с учетом формул (28), (29) дает равномерную норму погрешности $\|u^{exact} - u^{num}\|_C = \max_{j=0, n_1, i=0, n_2} |u_{i,j}^{exact} - u_{i,j}^{num}| = 1,650901637617608E - 012$, $n_1 = n_2 = 30, n = 13$ за время работы $t_2 - t_1 = 3,125000000000000E - 002$ секунды в режиме Debug.

Третий пример отличается от второго множителем x^2 вместо функции $\sin x$:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = x^2 \cdot \sin y, & 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0, & 0 \leq y \leq \pi. \end{cases} \quad (30)$$

Решение примера (30) ищем в виде:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= f(x) \sin y, u_{xx} = f'' \sin y, u_{yy} = -f(x) \sin(y), \\ u_{xx} + u_{yy} &= \sin y (f'' - f) = x^2 \sin y \Leftrightarrow f'' - f = x^2. \end{aligned}$$

В итоге имеем краевую задачу

$$\begin{cases} f'' - f = x^2, & 0 < x < \pi, \\ f(0) = f(\pi) = 0. \end{cases}$$

Общее решение однородного уравнения $f'' - f = 0$ имеет вид $f_{oo}(x) = A \operatorname{ch} x + B \operatorname{sh} x$, частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $f_u(x) = C + Dx^2 \Leftrightarrow 2D - C - Dx^2 = x^2 \Leftrightarrow D = -1, C = 2D = -2; f_u(x) = -x^2 - 2$.

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$f_{on}(x) = A \operatorname{ch} x + B \operatorname{sh} x - x^2 - 2; f_{on}(0) = 0 \Leftrightarrow A = 2; f_{on}(\pi) = 0 \Leftrightarrow 2 \operatorname{ch} \pi + B \operatorname{sh} \pi - \pi^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$B = \frac{2(1 - \operatorname{ch} \pi) + \pi^2}{\operatorname{sh} \pi}, f(x) = 2 \operatorname{ch} x + \left(\frac{2(1 - \operatorname{ch} \pi) + \pi^2}{\operatorname{sh} \pi} \right) \operatorname{sh} x - x^2 - 2.$$

В итоге точное решение (третий столбец в таблице 3) примера (30) имеет вид:

$$u(x, y) = \left(2 \operatorname{ch} x + \left(\frac{2(1 - \operatorname{ch} \pi) + \pi^2}{\operatorname{sh} \pi} \right) \operatorname{sh} x - x^2 - 2 \right) \sin y.$$

Таблица 3

Результаты работы программы в примере (30) по алгоритму (28) с 14 базисными функциями

x_j	y_i	$u^{exact}(x_j, y_i)$	$u^{num}(x_j, y_i)$
0,000000000E+000	0,00000000000E+000	0,00000000000E+000	0,00000000000E+000
0,628318530717959	0,00000000000E+000	0,00000000000E+000	0,00000000000E+000
1,25663706143592	0,00000000000E+000	0,00000000000E+000	0,00000000000E+000
1,88495559215388	0,00000000000E+000	0,00000000000E+000	0,00000000000E+000
2,51327412287183	0,00000000000E+000	0,00000000000E+000	0,00000000000E+000
3,14159265358979	0,00000000000E+000	0,00000000000E+000	0,00000000000E+000
0,00000000000E+000	0,628318530717959	0,00000000000E+000	-4,4197281494E-012
0,628318530717959	0,628318530717959	-0,378365183428067	-0,378365183428139
1,25663706143592	0,628318530717959	-0,800948970019281	-0,800948970022709
1,88495559215388	0,628318530717959	-1,15615367583243	-1,15615367583571
2,51327412287183	0,628318530717959	-1,11556919336887	-1,11556919336957
3,14159265358979	0,628318530717959	0,00000000000E+000	5,937775557832E-012
0,00000000000E+000	1,25663706143592	0,00000000000E+000	-7,15127036687E-012
0,628318530717959	1,25663706143592	-0,612207726946317	-0,612207726946200
1,25663706143592	1,25663706143592	-1,29596265674542	-1,29596265675096
1,88495559215388	1,25663706143592	-1,87069594371500	-1,87069594372030
2,51327412287183	1,25663706143592	-1,80502887167314	-1,80502887167427
3,14159265358979	1,25663706143592	0,00000000000E+000	9,607522670141E-012
0,00000000000E+000	1,88495559215388	0,00000000000E+000	-7,1512703668E-012
0,628318530717959	1,88495559215388	-0,612207726946200	-0,612207726946317
1,25663706143592	1,88495559215388	-1,29596265674542	-1,29596265675096
1,88495559215388	1,88495559215388	-1,87069594371500	-1,87069594372030
2,51327412287183	1,88495559215388	-1,80502887167314	-1,80502887167427
3,14159265358979	1,88495559215388	0,00000000000E+000	9,607522670141E-012
0,00000000000E+000	2,51327412287183	0,00000000000E+000	-4,4197281494E-012
0,628318530717959	2,51327412287183	-0,378365183428067	-0,378365183428139
1,25663706143592	2,51327412287183	-0,800948970019281	-0,800948970022709
1,88495559215388	2,51327412287183	-1,15615367583243	-1,15615367583571

x_j	y_i	$u^{exact}(x_j, y_i)$	$u^{num}(x_j, y_i)$
2,51327412287183	2,51327412287183	-1,11556919336887	-1,11556919336957
3,14159265358979	2,51327412287183	0,000000000000E+000	5,937775557832E-012
0,000000000000E+000	3,14159265358979	0,000000000000E+000	-9,20817110142E-028
0,628318530717959	3,14159265358979	-7,88295395102E-017	-7,88295395102E-017
1,25663706143592	3,14159265358979	-1,66871692331E-016	-1,66871692331E-016
1,88495559215388	3,14159265358979	-2,40875920567E-016	-2,40875920568E-016
2,51327412287183	3,14159265358979	-2,32420448964E-016	-2,32420448965E-016
3,14159265358979	3,14159265358979	0,000000000000E+000	1,23709086734E-027

Программа для примера (30) с уравнением Пуассона с учетом формул (28), (29) дает равномерную норму погрешности $\|u^{exact} - u^{num}\|_C = \max_{j=0, n_1, i=0, n_2} |u_{i,j}^{exact} - u_{i,j}^{num}| = 7,962103198977388E - 013, n_1 = n_2 = 60, n = 13$ за время работы $t_2 - t_1 = 1,562500000000000E - 002$ секунды в режиме Debug.

Рассмотрим четвертый пример:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, & 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0, & 0 \leq y \leq \pi. \end{cases} \quad (31)$$

Благодаря симметрии примера (31) можно решить более простую задачу

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \cos x \sin y, & 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0, & 0 \leq y \leq \pi. \end{cases} \quad (32)$$

Решение примера (32) ищем в виде:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= f(x) \sin y, u_{xx} = f'' \sin y, u_{yy} = -f(x) \sin(y), \\ u_{xx} + u_{yy} &= \sin y (f'' - f) = \cos x \sin y \Leftrightarrow f'' - f = \cos x. \end{aligned}$$

В итоге имеем краевую задачу

$$\begin{cases} f'' - f = \cos x, & 0 < x < \pi, \\ f(0) = f(\pi) = 0. \end{cases}$$

Общее решение однородного уравнения $f'' - f = 0$ имеет вид $f_{oh}(x) = A \operatorname{ch} x + B \operatorname{sh} x$, частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $f_q(x) = C \cos x \Leftrightarrow -2C \cos x = \cos x \Leftrightarrow C = -1/2; f_q(x) = -\cos x / 2$.

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$f_{oh}(x) = A \operatorname{ch} x + B \operatorname{sh} x - \cos x / 2; f_{oh}(0) = 0 \Leftrightarrow A = 1/2; f_{oh}(\pi) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{ch} \pi / 2 + B \operatorname{sh} \pi + 1/2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$B = \frac{-(1 + \operatorname{ch} \pi)}{2 \operatorname{sh} \pi}, f(x) = \frac{\operatorname{ch} x}{2} - \left(\frac{1 + \operatorname{ch} \pi}{2 \operatorname{sh} \pi} \right) \operatorname{sh} x - \frac{\cos x}{2}.$$

В итоге точное решение примера (32) имеет вид:

$$u(x, y) = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{2} - \left(\frac{1 + \operatorname{ch} \pi}{2 \operatorname{sh} \pi} \right) \operatorname{sh} x - \frac{\cos x}{2} \right) \sin y.$$

А точное решение примера (31) получим с учетом симметрии

$$u(x, y) = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{2} - \left(\frac{1 + \operatorname{ch} \pi}{2 \operatorname{sh} \pi} \right) \operatorname{sh} x - \frac{\cos x}{2} \right) \sin y + \left(\frac{\operatorname{ch} y}{2} - \left(\frac{1 + \operatorname{ch} \pi}{2 \operatorname{sh} \pi} \right) \operatorname{sh} y - \frac{\cos y}{2} \right) \sin x. \quad (33)$$

Вычисленное по формуле (33) точное решение в узлах равномерной сетки записано в третьем столбце таблицы 4, а численное — в четвертом.

Результаты работы программы в примере (31) с 14 базисными функциями

x_i	y_i	$u^{exact}(x_i, y_i)$	$u^{num}(x_i, y_i)$
0,0000000000E+000	0,0000000000E+000	0,0000000000E+000	0,0000000000E+000
0,628318530717959	0,0000000000E+000	0,0000000000E+000	-1,0441573502E-013
1,25663706143592	0,0000000000E+000	0,0000000000E+000	-1,6894820822E-013
1,88495559215388	0,0000000000E+000	0,0000000000E+000	-1,6894820822E-013
2,51327412287183	0,0000000000E+000	0,0000000000E+000	-1,0441573502E-013
3,14159265358979	0,0000000000E+000	0,0000000000E+000	-2,1754232868E-029
0,0000000000E+000	0,628318530717959	0,0000000000E+000	-1,0441573502E-013
0,628318530717959	0,628318530717959	-0,197551489645173	-0,197551489645269
1,25663706143592	0,628318530717959	-0,209856683772612	-0,209856683772669
1,88495559215388	0,628318530717959	-0,109788341001450	-0,109788341001551
2,51327412287183	0,628318530717959	2,220446049250E-016	1,42941214420E-015
3,14159265358979	0,628318530717959	5,014789931644E-016	1,04386956393E-013
0,0000000000E+000	1,25663706143592	0,0000000000E+000	-1,6894820822E-013
0,628318530717959	1,25663706143592	-0,209856683772612	-0,209856683772669
1,25663706143592	1,25663706143592	-0,161913979801615	-0,161913979801545
1,88495559215388	1,25663706143592	2,636779683484E-016	-1,6792123247E-015
2,51327412287183	1,25663706143592	0,109788341001451	0,109788341001552
3,14159265358979	1,25663706143592	8,342836304895E-016	1,68924517002E-013
0,0000000000E+000	1,88495559215388	0,0000000000E+000	-1,6894820822E-013
0,628318530717959	1,88495559215388	-0,109788341001450	-0,109788341001551
1,25663706143592	1,88495559215388	2,636779683484E-016	-1,6653345369E-015
1,88495559215388	1,88495559215388	0,161913979801615	0,161913979801542
2,51327412287183	1,88495559215388	0,209856683772613	0,209856683772670
3,14159265358979	1,88495559215388	8,551321168875E-016	1,68945365488E-013
0,0000000000E+000	2,51327412287183	0,0000000000E+000	-1,0441573502E-013
0,628318530717959	2,51327412287183	2,081668171172E-016	1,41553435639E-015
1,25663706143592	2,51327412287183	0,109788341001451	0,109788341001552
1,88495559215388	2,51327412287183	0,209856683772613	0,209856683772670
2,51327412287183	2,51327412287183	0,197551489645174	0,197551489645272
3,14159265358979	2,51327412287183	5,426373598439E-016	1,04428114760E-013
0,0000000000E+000	3,14159265358979	0,0000000000E+000	-2,1754232868E-029
0,628318530717959	3,14159265358979	5,014789931644E-016	1,04386956393E-013
1,25663706143592	3,14159265358979	8,342836304895E-016	1,68924517002E-013
1,88495559215388	3,14159265358979	8,551321168875E-016	1,68945365488E-013
2,51327412287183	3,14159265358979	5,426373598439E-016	1,04428114760E-013
3,14159265358979	3,14159265358979	2,175337872185E-031	4,35050491505E-029

Программа для примера (30) с уравнением Пуассона с учетом формул (28), (29) дает равномерную норму погрешности $\|u^{exact} - u^{num}\|_C = \max_{j=0, n_1, i=0, n_2} |u_{i,j}^{exact} - u_{i,j}^{num}| = 7,962103198977388E - 013, n_1 = n_2 = 60, n = 13$ за время работы $t_2 - t_1 = 1,56250000000000E - 002$ секунды в режиме Release.

Обсуждение

1. В работе впервые предложен алгоритм решения краевых задач модифицированным методом Бубнова-Галеркина (3)–(18) с линейными однородными уравнениями в частных производных эллиптического типа на прямоугольнике (1) с нулевыми значениями функции в вершинах прямоугольника. При этом коэффициенты $g_i(x, y)$ у частных производных могут зависеть от координат, но не зависят от неизвестной функции.

2. Алгоритм (3)–(18) можно обобщить для решения краевых задач с произвольным линейным уравнением в частных производных на прямоугольнике, в этом случае сумму для дифференциального оператора с одним индексом $\sum_{j=0}^m g_j(x, y) \frac{\partial^j \partial^{m-j}}{\partial x^j \partial y^{m-j}}$ необходимо заменить на сумму с двумя индексами $\sum_{i,j=0}^{m_1, m_2} g_{i,j}(x, y) \frac{\partial^i \partial^j}{\partial x^i \partial y^j}$. Условие нулевых значений функции в вершинах прямоугольника сохраняется.

3. В работе рассмотрены четыре примера решения краевой задачи с уравнением Лапласа (Пуассона) на прямоугольнике (19)–(26), а также решение уравнение Лапласа на прямоугольнике с однородными краевыми условиями в общем виде (27), (28) с неоднородной правой частью с разделяющимися переменными методом Бубнова-

Галеркина с нулевыми значениями решения в вершинах прямоугольника.

4. Точность решения краевой задачи с уравнением Пуассона модифицированным методом Бубнова-Галеркина сопоставима с точностью решения этой же задачи методом прогонки с пятидиагональной матрицей, при этом время решения задачи примерно в тридцать раз меньше.

5. Каждое неоднородное краевое условие на одной из четырех сторон квадрата порождает отдельную частную краевую задачу. В случае если краевые условия на противоположных сторонах квадрата совпадают (симметрия краевых условий), то можно обойтись двумя простыми краевыми задачами.

6. В качестве системы линейно-независимых координатных функций в краевой задаче использовались функции степенного вида (3), (4), которые равны -1 на левом конце отрезка, $+1$ на правом конце отрезка (для функций нечетного индекса). И равны $+1$ на концах отрезка (для функций четного индекса).

7. В работе предложена весовая матрица для квадратурной интегральной формулы на прямоугольнике с 12 порядком погрешности применяемая для вычисления скалярного произведения двух функций.

8. Два последних уравнения в каждой системе линейных алгебраических уравнений представляют условия для множества допустимых функций в краевой задаче на прямоугольнике.

Заключение. Численно решены четыре примера с помощью алгоритма (28), (29) для уравнения Пуассона на прямоугольнике, в которых неизвестная функция равна нулю в вершинах прямоугольника. Построен алгоритм (5)–(19) для решения краевых задач с однородными уравнениями в частных производных эллиптического типа произвольного порядка, что показывает успешное применение модифицированного метод Бубнова-Галеркина для решения краевых задач на прямоугольнике.

Список литературы / References

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. *Численные методы: учебное пособие для студентов физико-математических специальностей высших учебных заведений*. Москва: Бином. Лаборатория знаний; 2011. 636 с. Bahvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. *Numerical methods: a textbook for students of physics and mathematics specialties of higher educational institutions*. Moscow: BINOM. Knowledge laboratory; 2011. 636 p. (In Russ.)
2. Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. *Численные методы в задачах и упражнениях*. Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний; 2010. 240 с. Bahvalov N.S., Lapin A.V., Chizhonkov E.V. *Numerical methods in problems and exercises*. Moscow: BINOM. Knowledge laboratory; 2010. 240 p. (In Russ.)
3. Пикулин В.П., Похожаев С.И. *Практический курс по уравнениям математической физики*. Москва: МЦНМО; 2004. 208 с. Pikulin V.P., Pokhozhaev S.I. *Practical course on the equations of mathematical physics*. Moscow: MTSNMO; 2004. 208 p. (In Russ.)
4. Сухинов А.И., Проценко Е.А., Проценко С.В., Панасенко Н.Д. Параллельная численная реализация моделей волновой гидродинамики с учетом особенностей вертикального турбулентного обмена. *Математическое моделирование*. 2023;35(12):51–68. <https://doi.org/10.20948/mm-2023-12-04> Sukhinov A.I., Protsenko E.A. Parallel numerical implementation of wave hydrodynamics models taking into account the features of vertical turbulent exchange. *Mathematical Modeling*. 2023;35(12):51–68. (In Russ.) <https://doi.org/10.20948/mm-2023-12-04>
5. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Никитина А.В., Атаян А.М., Литвинов В.Н. Метод решения сеточных уравнений для задач гидродинамики в плоских областях. *Математическое моделирование*. 2023;35(3):35–58. (In Russ.) <https://doi.org/10.20948/mm-2023-03-03> Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Nikitina A.V., Atayan A.M., Litvinov V.N. Method for solving grid equations for hydrodynamic problems in flat areas. *Mathematical Modeling*. 2023;35(3):35–58. (In Russ.) <https://doi.org/10.20948/mm-2023-03-03>
6. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Сидорякина В.В., Кузнецова И.И., Атаян А.М. Использование параллельных вычислений для оценки процесса переноса загрязняющих веществ в мелководных водоемах. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2024;24(2):298–315. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-298-315> Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Sidoryakina V.V., Kuznetsova I.I., Atayan A.M. The use of parallel computing to assess the process of transport of pollutants in shallow water bodies. *News of Saratov University. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2024;24(2):298–315. (In Russ.) <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-298-315>
7. Сидорякина В.В., Сухинов А.И. Построение и исследование близости решений в L_2 двух краевых задач для модели переноса многокомпонентных взвесей в прибрежных системах. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2023;63(10):1721–1732. <https://doi.org/10.31857/S0044466923100149> Sidoryakina V.V., Sukhinov A.I. Construction and study of the proximity of solutions in L_2 of two boundary value problems for the model of transport of multicomponent suspended matter in coastal systems. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2023;63(10):1721–1732. (In Russ.) <https://doi.org/10.31857/S0044466923100149>
8. Сидорякина В.В., Соломаха Д.А. Симметризованные варианты методов Зейделя и верхней релаксации решения двумерных разностных задач эллиптического типа. *Computational Mathematics and Information Technologies*.

мирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), [ORCID](#), [SPIN-код](#), pulsar1900@mail.ru

Заявленный вклад авторов:

Н.К. Волосова: постановка задачи; написание черновика рукописи; формулировка идей исследования, целей и задач; разработка программного обеспечения.

К.А. Волосов: научное руководство; разработка методологии.

А.К. Волосова: перевод; изучение истории задачи; поиск литературы.

Н.А. Гурьева: подбор примеров для тестирования.

М.И. Карлов: формальный анализ.

Д.Ф. Пастухов: визуализация; валидация.

Ю.Ф. Пастухов: тестирование существующих компонентов кода.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Natalya K. Volosova, Post-graduate Student of Bauman Moscow State Technical University (5–1, 2nd Baumanskaya St., Moscow, 105005, Russian Federation), [ORCID](#), navalosova@yandex.ru

Konstantin A. Volosov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Applied Mathematics of the Russian University of Transport (9–9, Obraztsova St., Moscow, GSP-4, 127994, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), konstantinvolosov@yandex.ru

Aleksandra K. Volosova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Chief Analytical Department “Tramplin” LLC, Russian University of Transport (9–9, Obraztsova St., Moscow, GSP-4, 127994, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), alya01@yandex.ru

Nina A. Gurieva, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (29, Blokhin St., Novopolotsk, Republic of Belarus, 211440), [SPIN-code](#)

Mikhail I. Karlov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, Moscow Institute of Physics and Technology (9, Institutsky Lane, GSP-4, Dolgoprudny, 141701, Russian Federation), [SPIN-code](#), karlov.mipt@gmail.com

Dmitriy F. Pastukhov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (29, Blokhin St., Novopolotsk, 211440, Republic of Belarus), [ORCID](#), [SPIN-code](#), dmitrij.pastuhov@mail.ru

Yuriy F. Pastukhov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (29, Blokhin St., Novopolotsk, 211440, Republic of Belarus), [ORCID](#), [SPIN-code](#), pulsar1900@mail.ru

Contributions of the authors:

N.K. Volosova: ideas; formulation or evolution of overarching research goals and aims; writing-original draft preparation; software.

K.A. Volosov: supervision; methodology.

A.K. Volosova: translation; study of the history of the task; literature.

N.A. Gurieva: examples.

M.I. Karlov: formal analysis.

D.F. Pastukhov: visualization; validation.

Yu.F. Pastukhov: testing of existing code components.

Conflict of Interest Statement: the authors declare no conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 30.08.2025

Поступила после рецензирования / Reviewed 26.10.2025

Принята к публикации / Accepted 12.12.2025

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MATHEMATICAL MODELLING



УДК 532.517:551.46

Оригинальное эмпирическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2026-10-1-37-49>


Полуэмпирическая параметризация вертикально-неоднородного турбулентного обмена в стратифицированных мелководных водоёмах на основе натуральных данных

С.В. Проценко  , Е.А. Проценко 

Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ), г. Таганрог, Российская Федерация

 rab55555@rambler.ru

Аннотация

Введение. Турбулентное перемешивание в стратифицированных мелководных водоёмах играет ключевую роль в формировании гидрофизической структуры, определяя перенос импульса, тепла и растворённых веществ. Несмотря на развитие моделей турбулентности, существующие параметризации недостаточно точно воспроизводят вертикально-неоднородную структуру турбулентного обмена, особенно в условиях сложной термохалинной стратификации и нестационарных течений.

Материалы и методы. В работе использованы натурные данные, полученные в ходе экспедиционных исследований в Азовском море и Таганрогском заливе. Измерения температуры, солёности и плотности выполнялись с использованием CTD-зонда *Sea-Bird Electronics SBE 19plus*, а трёхмерные компоненты скорости — с помощью акустического доплеровского профилографа *ADCP Workhorse Sentinel 600*. На основе полученных данных рассчитывались вертикальные градиенты плотности и скорости, пульсационные характеристики течений, а также параметры устойчивости стратификации. Разработана полуэмпирическая параметризация коэффициентов турбулентной вязкости и диффузии, учитывающая сдвиговые характеристики потока, число Ричардсона и пульсации вертикальной скорости.

Результаты исследования. Предложена новая параметризация вертикально-неоднородного турбулентного обмена, основанная на использовании синхронных натуральных данных. Показано, что включение пульсационных характеристик скорости и термохалинных градиентов позволяет адекватно учитывать локальные механизмы генерации и подавления турбулентности. Проведено сравнение с классическими моделями ($k-\epsilon$, $k-\omega$, модель Смагоринского), продемонстрировавшее улучшение точности воспроизведения вертикальных профилей скорости и плотности. Снижение среднеквадратической ошибки составляет до 30–40 %, а значения коэффициента Нэша-Сатклиффа превышают 0,8.

Обсуждение. Установлено, что предложенная параметризация более точно описывает вертикальную структуру турбулентного обмена за счёт прямого использования измеряемых характеристик среды. В отличие от традиционных моделей, она обеспечивает выраженную вертикальную неоднородность коэффициентов обмена и корректно воспроизводит зоны стратификации. Ограничения подхода связаны с зависимостью от качества натуральных данных и отсутствием явного учёта нестационарных и волновых процессов.

Заключение. Разработана и реализована полуэмпирическая параметризация турбулентного обмена, основанная на натуральных данных высокого разрешения. Показано её преимущество по сравнению с классическими моделями при моделировании стратифицированных течений. Полученные результаты могут быть использованы в гидродинамических моделях для повышения точности прогноза турбулентного перемешивания и транспорта примесей в мелководных морских бассейнах.



Ключевые слова: турбулентный обмен, стратификация, число Ричардсона, вертикальная диффузия, турбулентное перемешивание, параметризация турбулентности, гидродинамическое моделирование, морские системы

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25–21–00021, <https://rscf.ru/en/project/25-21-00021>

Для цитирования. Проценко С.В., Проценко Е.А. Полуэмпирическая параметризация вертикально-неоднородного турбулентного обмена в стратифицированных мелководных водоёмах на основе натурных данных. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2026;10(1):37–49. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2026-10-1-37-49>

Original Empirical Research

Semi-Empirical Parameterization of Vertically Inhomogeneous Turbulent Exchange in Stratified Shallow Water Bodies Based on In Situ Data

Sofia V. Protsenko ✉, Elena A. Protsenko 

Taganrog Institute named after A.P. Chekhov (branch) of RSUE, Taganrog, Russian Federation

✉ rab55555@rambler.ru

Abstract

Introduction. Turbulent mixing in stratified shallow water bodies plays a key role in the formation of hydrophysical structure, governing the transport of momentum, heat, and dissolved substances. Despite advances in turbulence modelling, existing parameterizations often fail to accurately reproduce the vertically inhomogeneous structure of turbulent exchange, especially under complex thermohaline stratification and unsteady flow conditions.

Materials and Methods. The study is based on in situ data obtained during field campaigns in the Sea of Azov and the Taganrog Bay. Temperature, salinity, and density were measured using a CTD probe (Sea-Bird Electronics SBE 19plus), while three-dimensional velocity components were recorded using an Acoustic Doppler Current Profiler (ADCP Workhorse Sentinel 600). Based on the collected data, vertical gradients of density and velocity, turbulence fluctuations, and stratification stability parameters were calculated. A semi-empirical parameterization of turbulent viscosity and diffusivity coefficients was developed, taking into account flow shear characteristics, the Richardson number, and vertical velocity fluctuations.

Results. A new parameterization of vertically inhomogeneous turbulent exchange based on synchronous in situ data is proposed. It is shown that incorporating velocity fluctuations and thermohaline gradients allows for an adequate representation of local mechanisms of turbulence generation and suppression. A comparison with classical turbulence models (k - ϵ , k - ω , and the Smagorinsky model) demonstrates improved accuracy in reproducing vertical profiles of velocity and density. The root mean square error is reduced by up to 30–40%, while the Nash–Sutcliffe efficiency exceeds 0.8.

Discussion. The proposed parameterization provides a more accurate description of the vertical structure of turbulent exchange due to the direct use of measurable environmental characteristics. Unlike traditional models, it ensures pronounced vertical inhomogeneity of exchange coefficients and correctly reproduces stratification zones. The limitations of the approach are related to its dependence on the quality of in situ data and the lack of explicit consideration of unsteady and wave-induced processes.

Conclusion. A semi-empirical parameterization of turbulent exchange based on high-resolution in situ data has been developed and implemented. Its superiority over classical models in simulating stratified flows is demonstrated. The obtained results can be applied in hydrodynamic models to improve the accuracy of predicting turbulent mixing and transport processes in shallow marine basins.

Keywords: turbulent mixing, stratification, Richardson number, vertical diffusion, turbulence parameterization, ADCP, CTD, hydrodynamic modelling, marine systems

Funding. The study was supported by the Russian Science Foundation grant No. 25–21–00021, <https://rscf.ru/en/project/25-21-00021>

For Citation. Protsenko S.V., Protsenko E.A. Semi-Empirical Parameterization of Vertically Inhomogeneous Turbulent Exchange in Stratified Shallow Water Bodies Based on In Situ Data. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2026;10(1):37–49. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2026-10-1-37-49>

Введение. Турбулентное перемешивание в стратифицированных водоёмах является ключевым процессом, определяющим перенос импульса, тепла и растворённых веществ, а также формирование вертикальной структуры гидрофизических полей [1, 2]. В мелководных морских бассейнах, к которым относится Азовское море, роль турбулентного обмена особенно велика вследствие сочетания интенсивных ветровых воздействий, ограниченной глубины и выраженной термохалинной стратификации [3, 4].

Современные исследования показывают, что вертикальный турбулентный обмен определяется взаимодействием сдвиговых течений, генерирующих турбулентность, и плотностной стратификации, подавляющей её развитие [5]. При этом ключевыми параметрами являются вертикальные градиенты скорости и плотности, формируемые распределениями температуры и солёности [6, 7].

Несмотря на значительный прогресс в развитии моделей турбулентности, задача адекватного описания вертикально-неоднородного перемешивания остаётся актуальной. Широко используемые модели второго порядка замыкания (k - ϵ , k - ω) [8–10], а также модели крупномасштабного моделирования (*LES*, модель Смагоринского) [11, 12] позволяют учитывать основные механизмы генерации и диссипации турбулентности, однако требуют введения дополнительных переменных и эмпирических коэффициентов, не всегда напрямую связанных с наблюдаемыми

характеристиками среды [13]. В результате их применение в условиях стратифицированных мелководных бассейнов может сопровождаться существенными погрешностями.

Альтернативный подход реализуется в рамках параметризаций, основанных на гипотезе градиентной диффузии и использовании числа Ричардсона [14, 15]. Такие модели позволяют учитывать влияние стратификации, однако в большинстве случаев используют обобщённые эмпирические зависимости и не учитывают высокочастотную структуру турбулентных пульсаций [16, 17].

В последние годы активно развивается направление, связанное с интеграцией натуральных данных высокого разрешения в математические модели гидродинамики [18]. Использование современных измерительных комплексов (*ADCP*, *CTD*) позволяет получать синхронные данные о трёхмерных полях скорости, температуры, солёности и плотности с высокой временной и пространственной детализацией, что открывает новые возможности для построения физически обоснованных параметризаций турбулентного обмена.

Особый интерес представляют подходы, в которых коэффициенты турбулентного обмена определяются непосредственно через локальные характеристики потока, включая сдвиг скорости, стратификацию и статистические параметры турбулентных пульсаций [19]. Такие модели позволяют учитывать вертикальную неоднородность турбулентного перемешивания и адаптироваться к реальным условиям водной среды.

В данной работе предлагается полуэмпирическая параметризация вертикального турбулентного обмена, основанная на использовании синхронных натуральных данных о температуре, солёности, плотности и трёхмерных компонентах скорости. В отличие от существующих моделей, предложенный подход учитывает не только локальные градиенты скорости и плотности, но и пульсационные характеристики вертикальной скорости, что позволяет более адекватно описывать структуру турбулентности.

Целью работы является разработка и численная реализация новой параметризации турбулентного обмена, а также исследование её применимости и эффективности на основе натуральных данных Азовского моря. Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи:

1. разработка алгоритма параметризации турбулентного обмена на основе натуральных данных;
2. исследование точности и устойчивости модели в сравнении с классическими параметризациями.

Научная новизна работы заключается в разработке параметризации, напрямую использующей синхронные натуральные измерения температуры, солёности, плотности и трёхмерных скоростей для расчёта вертикально-неоднородных коэффициентов турбулентного обмена.

Материалы и методы

Исходные данные для модели. Натуральные данные, использованные в работе, получены в ходе экспедиционных исследований в центрально-восточной части Азовского моря и Таганрогском заливе [3, 4]. Измерения проводились в точках, охватывающих области с различной степенью стратификации и интенсивности течений.

Для регистрации параметров водной среды использовался гидрологический зонд *Sea-Bird Electronics SBE 19plus*, относящийся к классу компактных *CTD*-профилографов (*Conductivity–Temperature–Depth*) и обеспечивающий высокоточные измерения температуры, электропроводности (с последующим вычислением солёности) и давления. Прибор осуществляет измерения с частотой до 4 Гц, что позволяет получать детализированные вертикальные профили с высоким разрешением. Расчёт плотности морской воды выполнялся по уравнению состояния с использованием измеренных значений температуры и солёности, что является стандартным подходом в гидрофизических исследованиях [6, 7].

Работа зонда основана на последовательном измерении электропроводности воды, температуры (T), давления (p). На основе этих измерений рассчитываются солёность (S) и плотность воды $\rho(T, S, p)$.

Измерение электропроводности осуществляется с помощью индуктивной или электродной ячейки: при прохождении электрического сигнала через водную среду регистрируется её проводимость, которая напрямую связана с концентрацией растворённых солей. Температура измеряется высокоточным термистором с малым временем отклика, что особенно важно при регистрации тонких стратификационных слоёв. Давление фиксируется кварцевым или тензометрическим датчиком и используется для определения глубины погружения.

Особенности измерений:

- частота регистрации: до 4 измерений в секунду;
- высокая точность: температура: $\sim 10^{-3}$ °C, солёность: $\sim 10^{-3}$ ‰ (PSU);
- непрерывное профилирование по глубине при погружении зонда.

Полученные профили $T(z)$, $S(z)$, $\rho(z)$ определяют стратификацию водной толщи, используются для расчёта плотностного градиента $\partial\rho / \partial z$, служат основой для вычисления частоты Брунта-Вейссаля и числа Ричардсона, широко применяемых для анализа устойчивости стратифицированных течений [14, 15], а также задают начальные и граничные условия для численной модели.

Высокое вертикальное разрешение позволяет выявлять тонкие слои (термоклин, галоклин), критически важные для описания подавления турбулентного обмена [16].

Измерения трёхмерной структуры течений выполнялись с использованием акустического доплеровского профилографа течений *ADCP Workhorse Sentinel 600*. Принцип работы прибора основан на эффекте Доплера: частотный сдвиг отражённого акустического сигнала от взвешенных в воде частиц используется для определения компонент скорости течения [18, 19].

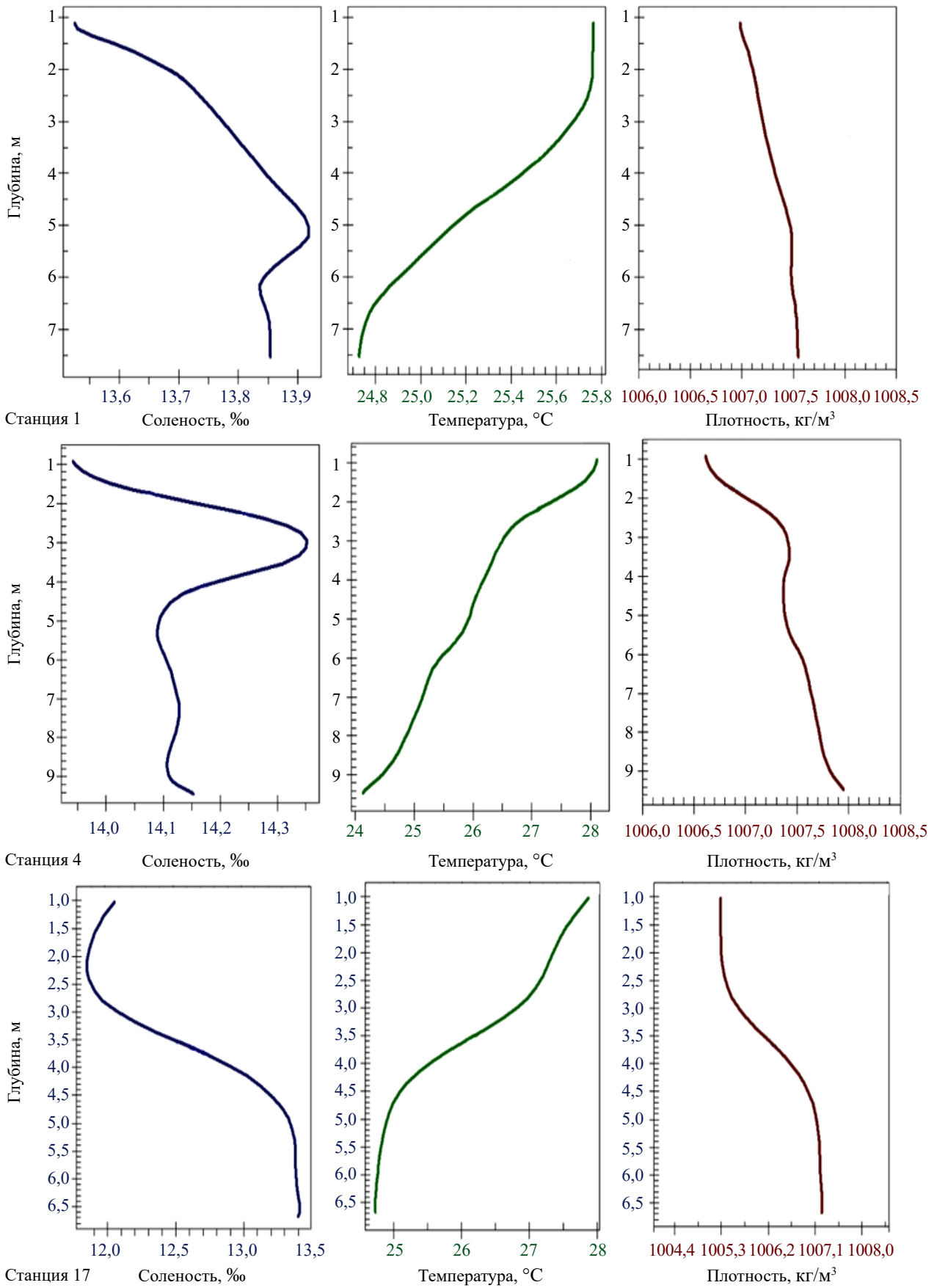


Рис. 1. Данные, полученные на трех различных станциях (1, 4, 17) с помощью гидрологического зонда *Sea-Bird Electronics SBE 19plus*: соленость $S(z)$, температура $T(z)$, плотность $\rho(z)$

Работа прибора основана на доплеровском эффекте: зонд излучает акустические импульсы в воду под фиксированными углами, после чего принимает сигнал, рассеянный на взвешенных частицах (взвесь, пузырьки, планктон), движущихся вместе с потоком.

Сдвиг частоты отражённого сигнала определяется как

$$\Delta f = \frac{2f_0 V_b}{c} \text{ or } \Delta f \propto V_b,$$

где Δf — доплеровский сдвиг частоты отражённого сигнала; V_b — проекция скорости движения частиц на направление луча; f_0 — исходная частота сигнала; c — скорость звука в воде.

Работа ADCP основана на эффекте Доплера, согласно которому сдвиг частоты отражённого акустического сигнала пропорционален скорости движения рассеивающих частиц вдоль луча прибора.

Используя несколько наклонных лучей, прибор восстанавливает:

- три компоненты вектора скорости u, v, w ;
- вертикальную структуру течения по всей толще воды.

Подобные методы широко применяются для исследования турбулентных процессов и вертикального перемешивания в океане [20, 21]. Измерения проводились с вертикальным разрешением 0,1 м и временным шагом 1 с. Продолжительность наблюдений на каждой станции составляла 20–30 минут, что обеспечило массив данных объёмом более $3 \cdot 10^6$ измерений, а на каждой станции — более $1,5 \cdot 10^5$ значений. Такой объём данных позволяет проводить статистически устойчивую оценку как средних характеристик течений, так и пульсационных компонент скорости.

Таким образом, на одной станции формировалось более 150 000 измерений, суммарный объём данных превышал $3 \cdot 10^6$ измерений.

Скорости сохранялись в формате временных рядов для каждой компоненты u, v, w с привязкой к глубине.

На основе данных ADCP рассчитывались:

- вертикальные профили скоростей $u(z,t), v(z,t), w(z,t)$;
- пульсации скорости (после выделения среднего течения) (u', v', w') ;
- вертикальные градиенты скорости $\partial u / \partial z, \partial v / \partial z$;
- характеристики сдвиговой турбулентности, играющие ключевую роль в генерации турбулентного обмена [1, 5].

Таблица 1

Основное оборудование и измеряемые параметры

Прибор	Изменяемые параметры	Диапазон и разрешение	Применение в модели
ADCP (<i>Acoustic Doppler Current Profiler</i>) WHS600 <i>Sentinel</i>	Вертикальные профили скорости воды (u, v, w)	0–5 м/с, вертикальное разрешение 0,1 м, частота 1 Гц	Анализ трёхмерных пульсаций скорости и турбулентных структур
CDT-зонд SEACAT <i>SBE 19plus</i>	Температура, солёность, плотность	Темп.: $\pm 0,001$ °C; солён.: $\pm 0,002$ ‰; шаг по глубине 0,5 м	Формирование стратификационных профилей для расчета турбулентной диффузии

Предварительная обработка данных. На рис. 2 изображены полученные с помощью ADCP данные о пульсациях скорости для нескольких станций измерения. Данные извлечены с использованием программного комплекса WinADCP. Пунктирной красной линией на рисунке обозначена граница достоверных данных, а именно значений с минимальной погрешностью. Ниже данной линии располагаются данные, содержащие шумы и не несущие достоверной информации, т. е. в случае, когда сигнал, поступающий из зонда, достигает дна (красная пунктирная линия) и отражается от поверхности.

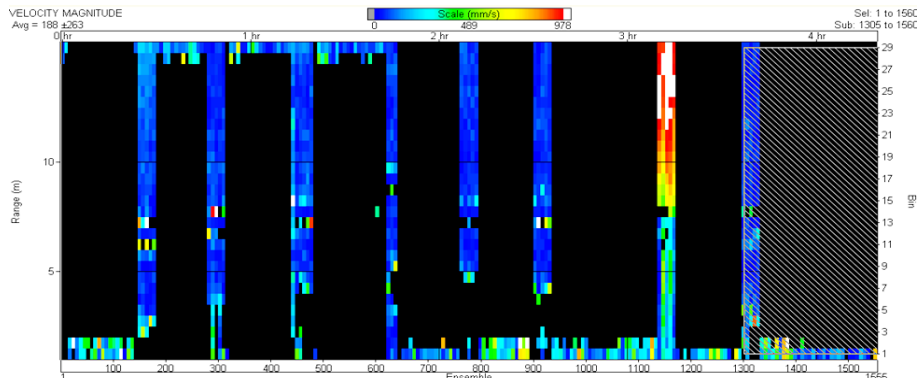


Рис. 2. Данные о пульсациях компонент скоростей, извлеченные из зонда после измерений с помощью программного комплекса WinADCP, полученные с помощью зонда ADCP (*Acoustic Doppler Current Profiler*) WHS600 *Sentinel*

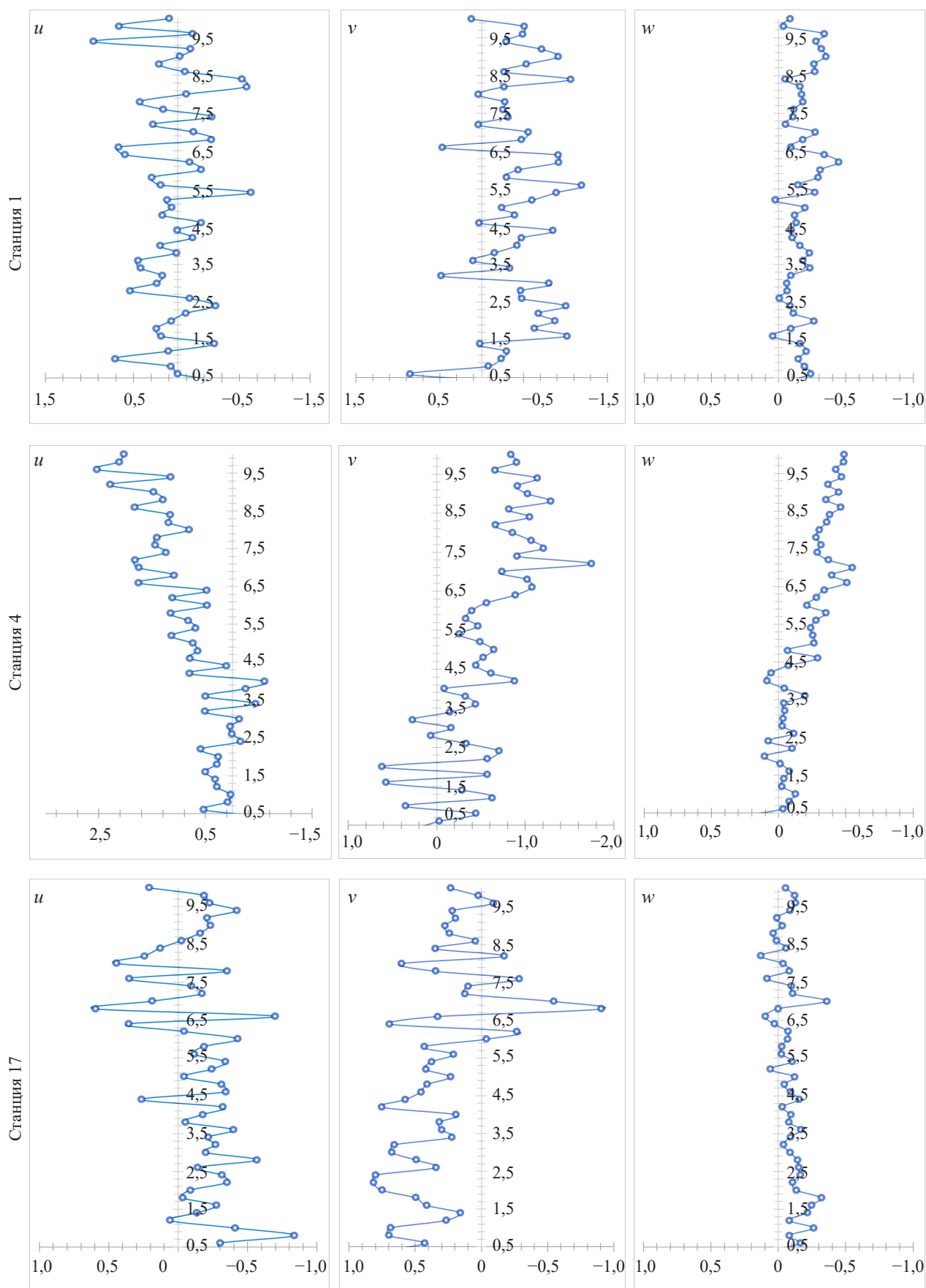


Рис. 3. Профили горизонтальной составляющей скорости (слева — проекция вектора скорости на ось, направленную с запада на восток, центр — с севера на юг) и вертикальной составляющей скорости, полученные с помощью зонда ADCP (*Acoustic Doppler Current Profiler*) WHS600 Sentinel

Предварительная обработка данных включала фильтрацию шумов и выделение достоверных измерений, а также статистическую обработку временных рядов, что соответствует стандартным подходам анализа турбулентных измерений [22–24]. Разложение скорости выполнялось в виде $u = \bar{u} + u'$, $v = \bar{v} + v'$, $w = \bar{w} + w'$, где пульсационные компоненты определялись как отклонения от осреднённых значений. На основе пульсационных составляющих вычислялись статистические характеристики, включая стандартное отклонение вертикальной скорости $\sigma_w(z) = \sqrt{w'^2}$. Такие характеристики широко используются для оценки интенсивности турбулентности и энергетических масштабов перемешивания [1, 17].

Результаты исследования

Построение полуэмпирической параметризации вертикально-неоднородного турбулентного обмена. Турбулентное перемешивание в стратифицированных водоёмах является ключевым механизмом, определяющим перенос импульса, тепла и растворённых веществ, и играет фундаментальную роль в формировании гидрофизической структуры морских бассейнов. Современные исследования показывают, что интенсивность турбулентного обмена определяется взаимодействием двух конкурирующих процессов: генерации турбулентности за счёт сдвиговых течений и её подавления вследствие плотностной стратификации [5].

В этой связи особую роль играют натурные измерения температуры, солёности, плотности и трёхмерного вектора скорости, поскольку именно эти параметры непосредственно определяют состояние стратифицированной среды. Температура и солёность формируют поле плотности воды, а вертикальные градиенты плотности определяют устойчивость водной толщи и её способность препятствовать вертикальному перемешиванию [6, 17]. Одновременно вертикальные градиенты компонент скорости u , v , w характеризуют сдвиговые течения, являющиеся основным источником генерации турбулентной кинетической энергии [5].

Современные теоретические и экспериментальные исследования показывают, что связь между этими механизмами удобно описывается через безразмерный параметр — число Ричардсона, представляющее собой отношение влияния стратификации к эффектам сдвига [14–15]. При малых значениях числа Ричардсона турбулентность активно развивается, тогда как при увеличении стратификации происходит её подавление. Однако, как показывают современные исследования, турбулентные процессы могут сохраняться даже при больших значениях числа Ричардсона за счёт обмена между кинетической и потенциальной энергией турбулентности, что указывает на сложный нелинейный характер взаимодействия стратификации и сдвига [1–2].

На основе этих представлений в современной океанологии сформировалось несколько основных подходов к параметризации турбулентного обмена. Наиболее простые из них основаны на гипотезе градиентной диффузии, в рамках которой турбулентные потоки выражаются через коэффициенты турбулентной вязкости и диффузии [2]. Однако ключевая проблема таких моделей заключается в необходимости задания самих коэффициентов обмена, которые в реальных условиях существенно варьируются в пространстве и времени [16].

Более развитые подходы используют зависимость коэффициентов турбулентного обмена от числа Ричардсона. К таким моделям относятся, в частности, параметризации типа Pacanowski-Philander [14] и более современные K -профильные схемы (KPP) [15], в которых коэффициенты вязкости и диффузии определяются на основе вертикальных профилей скорости и плотности, а также учитывается структура пограничного слоя океана. В рамках KPP -подхода вводится критерий на основе объёмного числа Ричардсона, позволяющий определять глубину перемешанного слоя и профиль турбулентных коэффициентов по всей толще воды [15].

Другой класс моделей представлен двухпараметрическими моделями турбулентности (k - ϵ , k - ω), в которых турбулентный обмен описывается через дополнительные переменные — турбулентную кинетическую энергию и её диссипацию [8–10]. Эти модели учитывают вклад сдвигов и плавучести в генерацию и разрушение турбулентности, однако требуют решения дополнительных дифференциальных уравнений и не используют напрямую измеренные профили температуры и солёности [13].

В последние годы наблюдается переход к более сложным и физически обоснованным параметризациям, включающим влияние волн (например, лэнгмюровская турбулентность) [22–23], а также гибридным и машинно-обучаемым моделям, в которых коэффициенты турбулентного обмена калибруются по данным высокоточных численных экспериментов и натурных измерений [18]. Такие подходы, как показано в современных работах, позволяют существенно повысить точность воспроизведения процессов перемешивания за счёт явного учёта зависимости коэффициентов обмена от стратификации, сдвига и внешнего воздействия [1].

Несмотря на значительный прогресс, общей проблемой существующих параметризаций остаётся ограниченная способность адекватно воспроизводить вертикально-неоднородную структуру турбулентного обмена в мелководных стратифицированных бассейнах [16, 24]. В частности, большинство моделей либо опирается на обобщённые эмпирические зависимости, либо требует введения дополнительных переменных, не всегда доступных из натурных измерений.

В связи с этим перспективным направлением является разработка параметризаций, непосредственно использующих синхронные натурные данные о температуре, солёности, плотности и трёхмерных полях скорости. Такой подход позволяет напрямую учитывать локальное взаимодействие сдвиговых и стратификационных эффектов и формировать коэффициенты турбулентного обмена как функции измеряемых параметров среды [16, 19].

Новая полуэмпирическая параметризация. В настоящей работе предлагается параметризация, непосредственно использующая измеряемые величины $T(z)$, $S(z)$, $\rho(z)$, $u(z)$, $v(z)$, $w(z)$.

Для построения параметризации турбулентного обмена рассчитывались следующие величины:

$$- \text{сдвиг скорости } S^2(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2;$$

– частота Брунта-Вейссала $N^2(z) = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z}$, характеризующая устойчивость стратифицированной водной среды и определяемая вертикальным градиентом плотности. Положительные значения $N^2(z)$ соответствуют устойчивой стратификации, препятствующей вертикальному перемешиванию, тогда как отрицательные значения указывают на развитие конвективной неустойчивости;

– число Ричардсона $Ri(z) = \frac{N^2(z)}{S^2(z) + \delta}$, где $N^2(z)$ — квадрат частоты Брунта-Вейссала; δ — малый регуляризирующий параметр, предотвращающий деление на ноль.

В отличие от классических моделей не вводится турбулентная энергия k , не используются универсальные коэффициенты, коэффициент обмена формируется напрямую из измеренных профилей.

Предлагается определять длину перемешивания как функцию глубины, стратификации, интенсивности пульсаций скорости

$$l(z) = \kappa z \cdot \exp(-\alpha Ri(z)) \cdot \left(1 + \eta \frac{\sigma_w(z)}{U(z)}\right),$$

где $l(z)$ — характерный вертикальный масштаб турбулентного перемешивания, который определяет размер турбулентных вихрей на глубине z ; κ — постоянная Кармана ($\kappa \approx 0,4$); α — эмпирический коэффициент подавления турбулентности стратификацией; η — добавочный эмпирический коэффициент, учитывающий вклад пульсационных характеристик скорости; Ri — градиентное число Ричардсона; σ_w — стандартное отклонение вертикальной скорости (из ADCP), $U = \sqrt{u^2 + v^2}$.

Турбулентная вязкость может быть рассчитана по формуле:

$$\nu_t(z) = l^2(z) \cdot S(z) \cdot \Phi(Ri),$$

где функция подавления $\Phi(Ri) = \frac{1}{(1 + \beta Ri)^n}$.

В стратифицированной водной среде перенос тепла и солёности осуществляется с различной интенсивностью, что приводит к эффекту двойной диффузии. Поскольку температурная диффузия существенно превышает солевую, возникают дополнительные механизмы перемешивания, такие как «соляные пальцы» и диффузионная конвекция. Для учёта данного эффекта в параметризацию введён множитель $\left(1 + \mu \frac{\partial T / \partial z}{\partial S / \partial z}\right)$, зависящий от отношения вертикальных градиентов температуры и солёности, что позволяет учитывать различие вкладов термической и галоинной стратификации в формирование турбулентного обмена.

С учётом влияния стратификации и термохалинной структуры коэффициент диффузии задаётся как:

$$K_t(z) = \nu_t(z) \cdot \frac{1}{1 + \gamma Ri(z)} \cdot \left(1 + \mu \left|\frac{\partial T / \partial z}{\partial S / \partial z}\right|\right),$$

где γ, μ — коэффициенты, учитывающие влияние стратификации и различия вкладов температуры и солёности. Коэффициенты параметризации $\alpha, \beta, \gamma, \eta, \mu, n$ определялись на основе минимизации расхождения между модельными и наблюдаемыми профилями.

В качестве целевой функции использовалась среднеквадратическая ошибка:

$$J = \sum_i (X_i^{model} - X_i^{obs})^2.$$

Оптимизация проводилась методом наименьших квадратов с использованием независимого набора данных для проверки устойчивости параметров.

Сравнение с классическими моделями турбулентности. Для оценки эффективности предложенной параметризации проводилось сравнение с широко используемыми моделями турбулентного обмена: k - ϵ , k - ω и моделью Смагоринского. Все модели реализовывались в одинаковых численных условиях с использованием идентичных исходных данных и граничных условий, что обеспечивало корректность и сопоставимость результатов.

Модель k - ϵ относится к классу двухпараметрических моделей замыкания второго порядка и основана на решении уравнений переноса для турбулентной кинетической энергии k и скорости её диссипации ϵ . Коэффициент турбулентной вязкости определяется как:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla k = P_k - \epsilon + \nabla \cdot (\nu_t \nabla k),$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \epsilon = C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} P_k - C_{2\epsilon} \frac{\epsilon^2}{k} + \nabla \cdot (\nu_t \nabla \epsilon),$$

где k — турбулентная кинетическая энергия; ϵ — скорость её диссипации; P_k — производство турбулентной энергии за счёт сдвигов; $\nu_t = C_\mu k^2 / \epsilon$ — турбулентная вязкость; $C_{1\epsilon}, C_{2\epsilon}, C_\mu$ — эмпирические коэффициенты.

Данная модель хорошо зарекомендовала себя для описания развитой изотропной турбулентности, однако её применение в стратифицированных средах ограничено. Основным недостатком является недостаточная чувствительность к локальной стратификации, что приводит к переоценке турбулентного обмена в областях с высокими градиентами плотности, например, в зоне термоклина.

Модель k - ω также относится к моделям второго порядка замыкания, но использует удельную скорость диссипации ω вместо ε . Турбулентная вязкость задаётся выражением:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla k = P_k - \beta^* k \omega + \nabla \cdot ((\nu + \sigma^* v_t) \nabla k),$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \beta \omega^2 + \nabla \cdot ((\nu + \sigma^* v_t) \nabla \omega),$$

где ω — удельная частота вихрей, $v_t = \frac{k}{\omega}$, α , β , β^* , σ , σ^* — эмпирические константы.

По сравнению с k - ε моделью, k - ω лучше описывает пограничные слои и более чувствительна к градиентам скорости. Тем не менее, как и в случае k - ε , модель требует введения дополнительных транспортных уравнений и эмпирических коэффициентов, что снижает её устойчивость при моделировании сложных стратифицированных течений.

Модель Смагоринского используется в рамках крупномасштабного моделирования (*LES*) и основана на гипотезе о пропорциональности турбулентной вязкости квадрату фильтрационного масштаба и модулю тензора скоростных деформаций:

$$v_t = (C_s \Delta)^2 |\mathbf{S}|,$$

где Δ — характерный масштаб сетки; C_s — постоянная Смагоринского ($\sim 0,17$); $|\mathbf{S}| = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$ — модуль тензора деформации скорости $S_{ij} = 0,5(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$.

Данная модель эффективно описывает энергоёмкие вихри, однако не учитывает влияние стратификации в явном виде. В результате она демонстрирует сглаженные профили турбулентного обмена и не воспроизводит локальные особенности перемешивания, обусловленные вертикальной неоднородностью плотности.

В отличие от рассмотренных моделей, предложенная параметризация:

- не требует решения дополнительных уравнений переноса;
- использует непосредственно измеряемые величины (температура, солёность, плотность, компоненты скорости);
- учитывает влияние стратификации через число Ричардсона;
- включает вклад пульсационных характеристик скорости;
- формирует вертикально-неоднородные коэффициенты турбулентного обмена.

Коэффициент турбулентной диффузии в предложенной модели определяется как функция локальных характеристик потока, что позволяет учитывать реальные условия формирования турбулентности, включая зоны сильного сдвига и устойчивой стратификации.

Сравнительный анализ показал, что классические модели склонны к сглаживанию вертикальных профилей коэффициентов турбулентного обмена, в частности:

- k - ε модель переоценивает интенсивность перемешивания в стратифицированных слоях;
- k - ω модель демонстрирует лучшую чувствительность к сдвигу, но также не учитывает в полной мере влияние плотностной стратификации;
- модель Смагоринского не воспроизводит локальные особенности турбулентности, связанные с вертикальными градиентами плотности и температурно-солевой структуры.

В то же время предложенная параметризация обеспечивает более детализированное описание вертикальной структуры турбулентного обмена за счёт использования натуральных данных высокого разрешения и явного учёта физических механизмов генерации и подавления турбулентности.

На рис. 4 представлено сравнение вертикальных профилей коэффициента турбулентной диффузии, рассчитанных с использованием классических моделей турбулентности и предложенной параметризации. Модель Смагоринского демонстрирует завышенные значения коэффициента турбулентного обмена по всей глубине и не воспроизводит влияние стратификации. Модель k - ε переоценивает перемешивание в области термоклина, тогда как k - ω показывает более согласованные результаты, однако сглаживает локальные особенности профиля.

Предложенная параметризация демонстрирует снижение коэффициента турбулентного обмена в зоне стратификации и его увеличение в придонном слое. Это подтверждает её способность учитывать локальные особенности турбулентной структуры потока.

Предложенная параметризация воспроизводит форму экспериментального профиля, включая снижение коэффициента турбулентного обмена в зоне стратификации и его увеличение в придонном слое. Это подтверждает её способность учитывать локальные особенности турбулентной структуры потока.

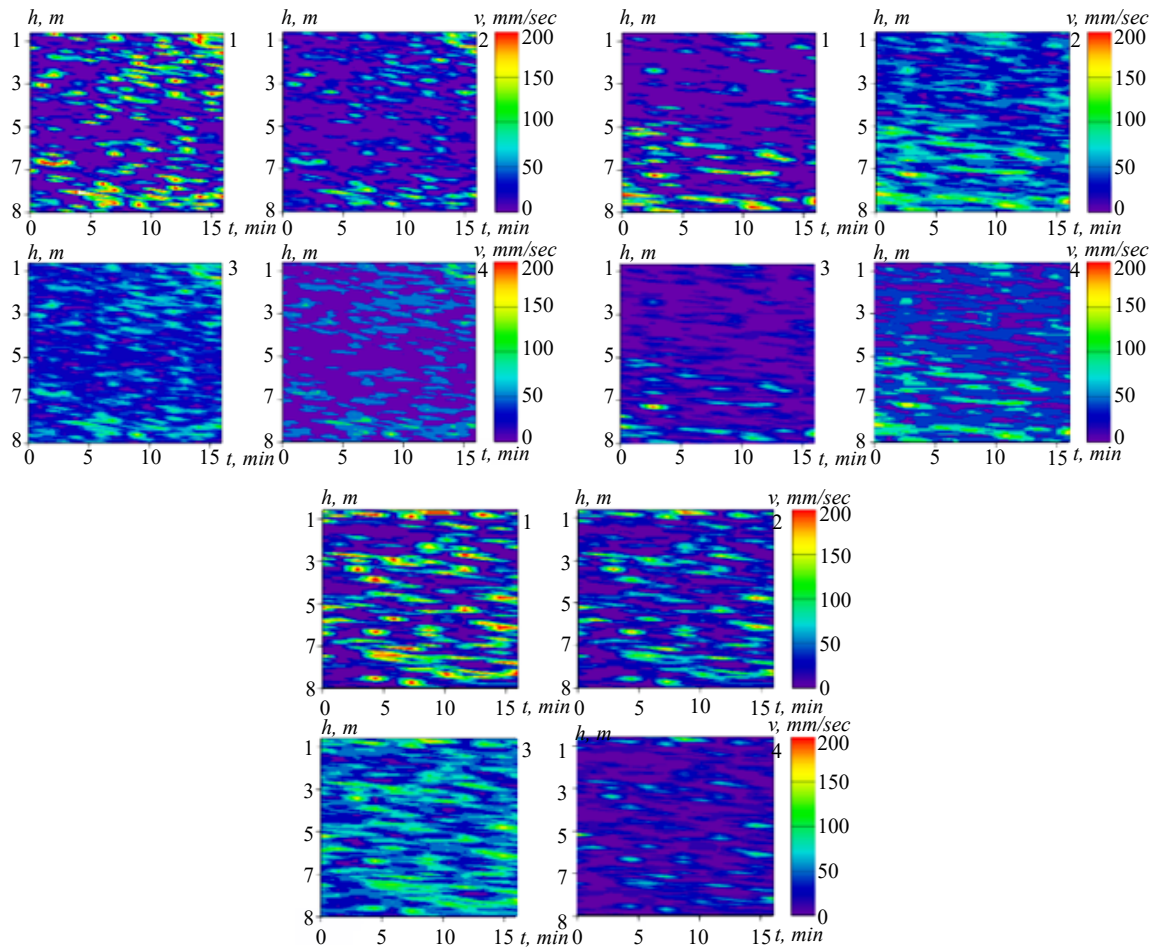


Рис. 4. Сравнение вертикальных профилей коэффициента турбулентной диффузии, полученных на основе различных моделей на трех станциях. Верхний ряд — модели $k-\epsilon$ и $k-\omega$, нижний ряд — модель Смагоринского и новая параметризация

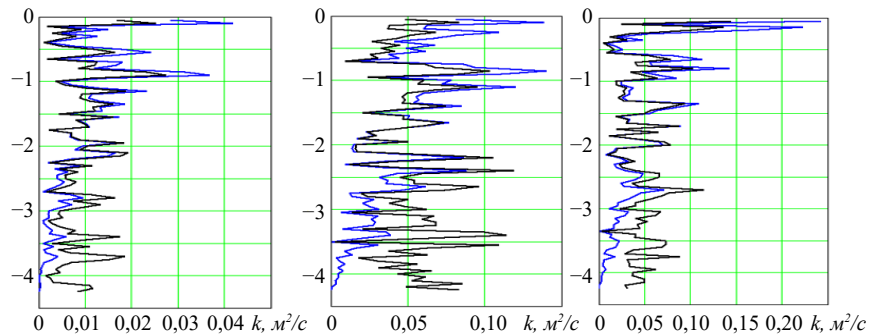


Рис. 5. Сравнение вертикальных профилей коэффициента турбулентной диффузии, полученных на основе новой параметризации (синяя линия), и профилей, восстановленных по натурным данным (голубая линия), на трех станциях (1, 4, 17)

Таблица 2

Сравнение параметризаций турбулентного обмена

Характеристика	$k-\epsilon$ модель	$k-\omega$ модель	Модель Смагоринского	Предложенная параметризация
Тип модели	Двухпараметрическая (k, ϵ)	Двухпараметрическая (k, ω)	LES -подход	Полуэмпирическая
Учёт стратификации	Ограниченный	Частичный	Отсутствует	Явный (через Ri)
Учёт пульсаций скорости	Косвенный	Косвенный	Частично	Прямой (через σ_w)

Характеристика	k - ε модель	k - ω модель	Модель Смагоринского	Предложенная параметризация
Использование натуральных данных	Ограниченное	Ограниченное	Нет	Прямое
Вертикальная неоднородность	Ограниченная	Умеренная	Сглаженная	Выраженная
Чувствительность к термоклину	Низкая	Средняя	Низкая	Высокая
Вычислительная сложность	Высокая	Высокая	Средняя	Низкая
Физическая интерпретируемость	Средняя	Средняя	Ограниченная	Высокая

Как следует из табл. 2, предложенная параметризация обладает рядом принципиальных преимуществ по сравнению с классическими моделями турбулентности. В частности, она обеспечивает явный учёт стратификации и пульсационных характеристик потока, не требует решения дополнительных уравнений и формирует выраженную вертикальную неоднородность коэффициентов турбулентного обмена. Это позволяет более адекватно описывать процессы перемешивания в стратифицированных мелководных водоёмах.

Оценка качества моделей проводилась по восстановлению вертикальных профилей скорости и плотности на независимом наборе натуральных данных.

Таблица 3

Сравнение моделей турбулентного обмена по метрикам $RMSE$ и NSE

Модель	$RMSE$ (скорость), м/с	$RMSE$ (плотность), кг/м ³	NSE (скорость)	NSE (плотность)
k - ε	0,18	0,32	0,72	0,68
k - ω	0,15	0,28	0,78	0,74
Смагоринского	0,21	0,35	0,69	0,65
Предложенная модель	0,11	0,19	0,86	0,81

Результаты сравнения моделей представлены в таблице 3. Как видно, предложенная параметризация демонстрирует наилучшие показатели точности как для профилей скорости, так и для распределения плотности. Снижение среднеквадратической ошибки по сравнению с классическими моделями составляет до 30–40 %, что свидетельствует о более точном воспроизведении вертикальной структуры потока. Значения коэффициента Нэша-Сатклиффа превышают 0,8, что соответствует высокому качеству моделирования и подтверждает адекватность предложенного подхода. Наибольшие различия между моделями наблюдаются в областях с выраженной стратификацией, где классические модели склонны к переоценке интенсивности перемешивания. Предложенная параметризация, напротив, корректно учитывает влияние градиентов плотности и сдвиговых течений, обеспечивая более точное описание динамики водной толщи. Таким образом, предложенная параметризация демонстрирует устойчивое превосходство над классическими моделями как по точности, так и по способности воспроизводить вертикальную структуру турбулентного обмена.

Обсуждение. Полученные результаты демонстрируют, что предложенная параметризация турбулентного обмена обеспечивает более точное воспроизведение вертикальной структуры перемешивания по сравнению с классическими моделями. Это подтверждается как количественными метриками, так и качественным анализом вертикальных профилей коэффициента турбулентной диффузии.

Ключевым фактором повышения точности является использование натуральных данных высокого разрешения, позволяющих непосредственно учитывать локальные градиенты скорости и плотности. В отличие от моделей k - ε и k - ω , в которых турбулентные характеристики определяются через дополнительные транспортные уравнения, предложенный подход использует измеряемые параметры среды, что повышает физическую интерпретируемость результатов и снижает зависимость от эмпирических коэффициентов.

Анализ профилей $K_t(z)$ показывает, что классические модели склонны к сглаживанию вертикальной структуры турбулентного обмена. В частности, модель Смагоринского демонстрирует завышенные значения коэффициента диффузии по всей глубине, что связано с отсутствием явного учёта стратификации. Модель k - ε переоценивает интенсивность перемешивания в области термоклина, тогда как модель k - ω , обладая большей чувствительностью к градиентам скорости, частично воспроизводит структуру потока, но не учитывает в полной мере влияние плотностной стратификации.

Предложенная авторами параметризация, напротив, обеспечивает выраженную вертикальную неоднородность коэффициента турбулентного обмена. Это достигается за счёт совместного учёта сдвиговых характеристик потока, стратификации (через число Ричардсона) и пульсационных компонент скорости. Введение зависимости

от стандартного отклонения вертикальной скорости позволяет учитывать реальную интенсивность турбулентности, что особенно важно в придонных слоях и зонах локального усиления перемешивания.

Дополнительным преимуществом является учёт термохалинной структуры среды. Использование градиентов температуры и солёности позволяет учитывать эффекты двойной диффузии, которые играют существенную роль в формировании тонкой структуры стратификации. Это обеспечивает более адекватное описание процессов перемешивания в условиях слабой и устойчивой стратификации.

Вместе с тем, предложенный подход имеет ряд ограничений. Во-первых, точность параметризации зависит от качества исходных данных, в частности от точности измерений скоростей и плотности, а также от корректности вычисления их градиентов. Во-вторых, модель ориентирована на локальное описание турбулентного обмена и не учитывает явно нестационарные эффекты, связанные с эволюцией турбулентной энергии во времени. Кроме того, в текущей постановке не рассматривается влияние ветрового воздействия и волновых процессов, которые могут существенно изменять структуру турбулентности в верхнем слое.

Тем не менее, полученные результаты свидетельствуют о высокой эффективности предложенной параметризации и её соответствии современным тенденциям развития моделей турбулентности, направленным на интеграцию натурных данных и повышение физической обоснованности моделей.

Предложенный подход может быть адаптирован для других мелководных морских бассейнов при наличии данных высокого разрешения, однако требует дополнительной валидации для условий сильного волнового воздействия.

Заключение. В работе разработана полуэмпирическая параметризация вертикального турбулентного обмена в стратифицированной водной среде, основанная на использовании синхронных натурных данных о температуре, солёности, плотности и трёхмерных компонентах скорости. Предложенный подход позволяет рассчитывать коэффициенты турбулентной вязкости и диффузии непосредственно на основе измеряемых характеристик потока без введения дополнительных уравнений переноса.

Проведённые численные эксперименты показали, что разработанная параметризация обеспечивает более точное воспроизведение вертикальной структуры турбулентного обмена по сравнению с классическими моделями $k-\epsilon$, $k-\omega$ и моделью Смагоринского. Улучшение точности подтверждается снижением среднеквадратической ошибки и увеличением коэффициента Нэша-Сатклиффа при моделировании профилей скорости и плотности.

Установлено, что ключевыми факторами повышения точности являются учёт локальных градиентов скорости и плотности, использование пульсационных характеристик вертикальной скорости, включение термохалинных эффектов, связанных с двойной диффузией. Практическая значимость работы заключается в возможности применения предложенной параметризации в составе гидродинамических моделей для задач прогноза турбулентного перемешивания, транспорта примесей и формирования стратификации в мелководных морских бассейнах, включая Азовское море. Дальнейшее развитие работы может быть связано с расширением модели на нестационарные трёхмерные задачи, учётом ветровых и волновых воздействий, а также использованием методов автоматической калибровки параметров на основе расширенных массивов натурных данных.

Список литературы / References

1. Gregg M.C., D'Asaro E.A., Riley J.J., Kunze E. Mixing efficiency in the ocean. *Annual Review of Marine Science*. 2018;10:443–473. <https://doi.org/10.1146/annurev-marine-121916-063643>
2. Thorpe S.A. Turbulent mixing in stratified fluids: A review. *Journal of Geophysical Research*. 2005;110:C06005. <https://doi.org/10.1029/2004JC002720>
3. Myslenkov S.A., Arkhipkin V.S. Recurrence of storm waves in the Sea of Azov according to modeling. *Russian Meteorology and Hydrology*. 2024;49:1061–1066. <https://doi.org/10.3103/S106837392412005X>
4. Yaitskaya N. The wave climate of the Sea of Azov. *Water*. 2022;14:555. <https://doi.org/10.3390/w14040555>
5. Smyth W.D., Moum J.N. Ocean mixing by Kelvin–Helmholtz instability. *Oceanography*. 2012;25:140–149. <https://doi.org/10.5670/oceanog.2012.49>
6. Osborn T.R. Estimates of the local rate of vertical diffusion from dissipation measurements. *Journal of Physical Oceanography*. 1980;10:83–89. [https://doi.org/10.1175/1520-0485\(1980\)010<0083:EOTLRO>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(1980)010<0083:EOTLRO>2.0.CO;2)
7. Peters H., Gregg M.C. On the parameterization of equatorial turbulence. *Journal of Geophysical Research*. 1994;99:18333–18348. <https://doi.org/10.1029/94JC00033>
8. Umlauf L., Burchard H. Second-order turbulence closure models for geophysical boundary layers: A review of recent work. *Continental Shelf Research*. 2005;25:795–827. <https://doi.org/10.1016/j.csr.2004.08.004>
9. Burchard H., Bolding K. Comparative analysis of four second-moment turbulence closure models for the oceanic mixed layer. *Journal of Physical Oceanography*. 2001;31:1943–1968. [https://doi.org/10.1175/1520-0485\(2001\)031<1943:CAOFSM>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(2001)031<1943:CAOFSM>2.0.CO;2)
10. Warner J.C., Sherwood C.R., Arango H.G., Signell R.P. Performance of four turbulence closure models implemented using a generic length scale method. *Ocean Modelling*. 2005;8:81–113. <https://doi.org/10.1016/j.ocemod.2003.12.003>
11. Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations. *Monthly Weather Review*. 1963;91:99–164. [https://doi.org/10.1175/1520-0493\(1963\)091<0099:GCEWTP>2.3.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0493(1963)091<0099:GCEWTP>2.3.CO;2)
12. Sagaut P. *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows*. Berlin: Springer; 2006. <https://doi.org/10.1007/3-540-26344-6>
13. Mellor G.L., Yamada T. Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems. *Reviews of Geophysics*. 1982;20:851–875. <https://doi.org/10.1029/RG020i004p00851>

14. Pacanowski R.C., Philander S.G.H. Parameterization of vertical mixing in numerical models of tropical oceans. *Journal of Physical Oceanography*. 1981;11:1443–1451. [https://doi.org/10.1175/1520-0485\(1981\)011<1443:POVMIN>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(1981)011<1443:POVMIN>2.0.CO;2)
15. Large W.G., McWilliams J.C., Doney S.C. Oceanic vertical mixing: A review and a model with a nonlocal boundary layer parameterization. *Reviews of Geophysics*. 1994;32:363–403. <https://doi.org/10.1029/94RG01872>
16. Bouffard D., Boegman L. A diapycnal diffusivity model for stratified environmental flows. *Dynamics of Atmospheres and Oceans*. 2013;61–62:14–34. <https://doi.org/10.1016/j.dynatmoce.2013.02.002>
17. Gregg M.C. Diapycnal mixing in the thermocline: A review. *Journal of Geophysical Research*. 1987;92:5249–5286. <https://doi.org/10.1029/JC092iC05p05249>
18. Wagner G.L., Young W.R. A one-equation model for the turbulent kinetic energy in the ocean surface boundary layer. *Journal of Advances in Modeling Earth Systems*. 2015;7:131–146. <https://doi.org/10.1002/2014MS000378>
19. Canuto V.M., Howard A., Cheng Y., Dubovikov M.S. Ocean turbulence. Part I: One-point closure model — momentum and heat vertical diffusivities. *Journal of Physical Oceanography*. 2001;31:1413–1426. [https://doi.org/10.1175/1520-0485\(2001\)031<1413:OTPIOP>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(2001)031<1413:OTPIOP>2.0.CO;2)
20. Pope S.B. *Turbulent Flows*. Cambridge: Cambridge University Press; 2000. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511840531>
21. Moum J.N. Energy-containing scales of turbulence in the ocean thermocline. *Journal of Geophysical Research*. 1996;101:14095–14109. <https://doi.org/10.1029/96JC00507>
22. Li M., Garrett C. Mixed layer deepening due to Langmuir circulation. *Journal of Physical Oceanography*. 1997;27:121–132. [https://doi.org/10.1175/1520-0485\(1997\)027<0121:MLDDTL>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(1997)027<0121:MLDDTL>2.0.CO;2)
23. Harcourt R.R. A second-moment closure model of Langmuir turbulence. *Journal of Physical Oceanography*. 2013;43:673–697. <https://doi.org/10.1175/JPO-D-12-0105.1>
24. Burchard H., Rennau H. Comparative quantitative model study of nonlocal turbulence closure schemes. *Journal of Geophysical Research*. 2008;113:C09028. <https://doi.org/10.1029/2007JC004492>

Об авторах:

Софья Владимировна Проценко, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, научный сотрудник Таганрогского института им. А.П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета (347936, Российская Федерация, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48), [ORCID](#), [SPIN-код](#), rab5555@rambler.ru

Елена Анатольевна Проценко, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, ведущий научный сотрудник Таганрогского института им. А.П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета (347936, Российская Федерация, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48), [ORCID](#), [SPIN-код](#), eapros@rambler.ru

Заявленный вклад авторов:

С.В. Проценко: курирование данных; деятельность по аннотированию, очистке данных и поддержанию их целостности; разработка программного обеспечения; визуализация, валидация; тестирование существующих компонентов.

Е.А. Проценко: общее научное руководство; постановка задачи; формулировка идей исследования, целей и задач; разработка методологии; разработка концепции.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Sofia V. Protsenko, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, Research Fellow, A.P. Chekhov Taganrog Institute (branch) Rostov State University of Economics (48, Initiative St., Taganrog, 347936, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), rab5555@rambler.ru

Elena A. Protsenko, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, Leading Research Fellow, A.P. Chekhov Taganrog Institute (branch) Rostov State University of Economics (48, Initiative St., Taganrog, 347936, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), eapros@rambler.ru

Contributions of the authors:

S.V. Protsenko: data management; annotation, data cleaning, and maintaining data integrity; software development; visualization, validation; testing of existing components.

E.A. Protsenko: general scientific supervision; problem statement; formulation of research ideas, goals and objectives; development of methodology, concept development; scientific guidance.

Conflict of Interest Statement: the authors declare no conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 02.02.2026

Поступила после рецензирования / Reviewed 27.02.2026

Принята к публикации / Accepted 25.03.2026

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MATHEMATICAL MODELLING



УДК 004.032.26

Оригинальное эмпирическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2026-10-1-50-57>


Аппроксимация функций нейронными сетями

А.В. Галабурдин

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

✉ Galaburdin@mail.ru

Аннотация

Введение. В настоящее время при решении многих задач используются методы, основанные на применении искусственных нейронных сетей. Эти методы отличаются простотой в применении и достаточно универсальными возможностями. Нейронные сети различной архитектуры достаточно часто применяются к решениям задач аппроксимации функций нескольких переменных. Разработанные методы построения подобных нейронных сетей применяются при решении актуальных задач в математике, технике, экономике.

Материалы и методы. Предлагается метод построения нейронной сети для решения задач аппроксимации функций, основанный на применении в качестве функций активации дробно-линейных функций. Описывается алгоритм построения нейронных сетей для аппроксимации функций одной и двух переменных. Отдельно рассматривается случай, когда значения аппроксимируемой функции заданы с погрешностью. Исследуется возможность использования данного подхода при экстраполяции функций.

Результаты исследования. Представлены результаты построения нейронных сетей аппроксимации функций одной и двух переменных и применения построенных сетей в виде графиков. Предложенный метод был использован при решении задач экстраполяции, задач аппроксимации функций, значения которых заданы с погрешностью.

Обсуждение. Метод показал хорошие результаты при решении указанных задач. В качестве функций активации были использованы дробно-рациональные функции дельтообразного поведения. Поэтому определение весов нейронной сети свелось к решению систем линейных уравнений с хорошо обусловленными матрицами, что обеспечило достаточно высокую степень точности результатов аппроксимации.

Заключение. Представленные результаты доказали эффективность метода. Предложенный метод построения нейронных сетей может быть использован при решении задач, связанных с цифровой обработкой сигналов.

Ключевые слова: аппроксимация функций, нейронные сети

Для цитирования. Галабурдин А.В. Аппроксимация функций нейронными сетями. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2026;10(1):50–57. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2026-10-1-50-57>

Original Empirical Research

Function Approximation by Neural Networks

Alexander V. Galaburdin

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

✉ Galaburdin@mail.ru

Abstract

Introduction. Currently, many problems are solved using methods based on artificial neural networks. These methods are characterized by ease of application and fairly versatile capabilities. Neural networks of various architectures are frequently employed to solve problems of approximating functions of several variables. The developed methods for constructing such neural networks are applied to solving relevant problems in mathematics, engineering, and economics.

Materials and Methods. A method for constructing a neural network to solve function approximation problems is proposed, based on the use of fractional-linear functions as activation functions. An algorithm for constructing neural networks for

approximating functions of one and two variables is described. The case where the values of the approximated function are given with an error is considered separately. The possibility of using this approach for function extrapolation is investigated.

Results. The results of constructing neural networks for approximating functions of one and two variables and the application of the constructed networks are presented in the form of graphs. The proposed method was used in solving extrapolation problems and problems of approximating functions whose values are given with an error.

Discussion. The method showed good results in solving these problems. Fractional-rational functions with delta-like behavior were used as activation functions. Therefore, determining the neural network weights was reduced to solving systems of linear equations with well-conditioned matrices, which ensured a sufficiently high degree of accuracy in the approximation results.

Conclusion. The presented results proved the effectiveness of the method. The proposed method for constructing neural networks can be used in solving problems related to digital signal processing.

Keywords: function approximation, neural networks

For Citation. Galaburdin A.V. Function Approximation by Neural Networks. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2026;10(1):50–57. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2026-10-1-50-57>

Введение. В настоящее время при решении многих задач используются методы, основанные на применении искусственных нейронных сетей. Нейронные сети достаточно часто применяются при решении задач аппроксимации функций и прогнозирования. Возможность использования нейронных сетей при аппроксимации функций была представлена еще в работах А.Н. Колмогорова и В.И. Арнольда [1, 2]. Исследования в данной области активно развиваются в наши дни. Например, в работе [3] представлен метод аппроксимации функций двух переменных посредством нейронной сети, не требующей обучения, а в работе [4] представлен процесс аппроксимации функции нейронной сетью, основанный на последовательном дополнении нейронов в структуру однослойного персептрона. Статья [5] посвящена исследованию различных подходов к построению аппроксимаций функций активации. Результаты этой работы могут быть использованы при реализации методов конфиденциального машинного обучения. В исследовании [6] изложен метод идентификации моделей производственной функции на основе статистических данных с использованием нейронной сети, а в статье [7] отмечается, что при аппроксимации и интерполяции функций с использованием искусственных нейронных сетей существует ряд ограничений и особенностей, которые и исследуются в данной работе. Вопрос о количестве нейронов, необходимых для аппроксимации выпуклых функций, рассматривается в [8]; в работе [9] доказано, что для аппроксимации оптимально использование двухслойной нейронной сети. Статья [10] посвящена оптимальным аппроксимациям одномерных функций при помощи нейронных сетей *ReLU* с обратной связью. В [11] сообщается об отрицательном результате, полученном при аппроксимации функций с несколькими неизвестными, определенных на компактных множествах. Многие работы посвящены применению нейронных сетей при прогнозировании экономических показателей [12–14].

Материалы и методы. При построении нейронных сетей для решения различных задач в основном применяется достаточно ограниченное множество функций активации. Причем часто изначально уже имеется некоторая информация о решении этих задач. Но при выборе функций активации эта информация чаще всего слабо используется. В работах [15, 16] при построении нейронной сети для решения краевых задач для дифференциальных уравнений для областей сложной формы была предпринята попытка учесть известную информацию о решении данной задачи. Эту идею автор развивает и в настоящей работе.

Известно, что дробно-рациональные функции обладают хорошими аппроксимационными свойствами. С другой стороны, при построении нейронных сетей для решения задач аппроксимации функций успешно применяется функция Гаусса. Характерной особенностью функции Гаусса является то, что она принимает значения, существенно отличные от нуля на некотором небольшом отрезке числовой оси. Такой же особенностью обладают многие дробно-рациональные функции, например:

$$K_1(x, z) = \frac{1}{1 + s^2(x - z)^2},$$

$$K_2(x, z) = \frac{1}{1 + s^4(x - z)^4},$$

$$K_3(x, z) = \frac{1}{1 + s^2(x - z)^2 + s^4(x - z)^4}.$$

Допустим, что заданы значения функции на некотором множестве точек $x_i \in [a, b]$, $i = 1, \dots, N$, где $[a, b]$ — отрезок, на котором аппроксимируется функция $f(x)$.

Тогда аппроксимационную формулу можно представить в виде:

$$f(x) = \sum_{i=1}^N a_i f(x_i) K(x, x_i),$$

где a_i — неизвестные коэффициенты, $K(x, x_i)$ — одна из функций, приведенных выше.

Для определения коэффициентов a_i находится минимум функционала

$$J(a_i) = \sum_{j=1}^M \left\{ \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N [a_i f^j(x_i) K(x_k, x_i) - f^j(x_k)] \right\}^2 + \alpha \sum_{j=1}^M \left\{ \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N a_i f^j(x_i) K(x_k, x_i) \right\}^2,$$

где $f^j(x_i)$ — функции из обучающего множества, M — количество функций обучающего множества, α — параметр. Неизвестные коэффициенты a_i определяются из системы линейных уравнений, которая получается из соотношений

$$\frac{\partial J(a_i)}{\partial a_m} = 0, \quad i, m = 1, \dots, N.$$

В силу указанных выше свойств используемых дробно-рациональных функций полученная система уравнений имеет матрицу с диагональным преобладанием. Если значения аппроксимируемой функции заданы с некоторой погрешностью ε , то коэффициенты a_i определяются посредством минимизации функционала

$$J(a_i) = \sum_{j=1}^M \left\{ \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N [a_i (f^j(x_i) + \varepsilon^j) K(x_k, x_i) - f^j(x_k)] \right\}^2 + \alpha \sum_{j=1}^M \left\{ \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N a_i f^j(x_i) K(x_k, x_i) \right\}^2,$$

где ε^j — погрешность j -ой функции из обучающего множества.

При этом предполагается, что известен уровень погрешности аппроксимируемой функции. Это дает возможность соответствующим образом подобрать величины ε^j .

Аналогично можно строить аппроксимационные формулы для функций двух переменных. В этом случае следует использовать дробно-рациональные функции, зависящие от двух переменных:

$$P_1(x, u, y, v) = \frac{1}{(1 + s^2((x-u)^2 + (y-v)^2))},$$

$$P_2(x, u, y, v) = \frac{1}{(1 + s^4((x-u)^2 + (y-v)^2)^2)},$$

$$P_3(x, u, y, v) = \frac{1}{(1 + s^2((x-u)^2 + (y-v)^2) + s^4((x-u)^2 + (y-v)^2)^2)}.$$

Будем аппроксимировать функции на множестве $\begin{cases} x \in [a, b] \\ y \in [c, d] \end{cases}$. Предположим, что заданы значения функции на множестве точек (x_p, y_j) , $i = 1, \dots, N_x, j = 1, \dots, N_y$.

В этом случае аппроксимационная формула будет иметь вид:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_y} a_{in} f(x_i, y_n) P(x, x_i, y, y_n),$$

а коэффициенты a_{in} будут определяться посредством минимизации функционала

$$J(a_{in}) = \sum_{j=1}^M \left\{ \sum_{k=1}^{N_x} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{s=1}^{N_y} \sum_{t=1}^{N_y} [a_{in} f^j(x_i, y_t) P(x_k, x_i, y_s, y_t) - f^j(x_k, y_s)] \right\}^2 + \alpha \sum_{j=1}^M \left\{ \sum_{k=1}^{N_x} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{s=1}^{N_y} \sum_{t=1}^{N_y} a_{in} f^j(x_i, y_t) P(x_k, x_i, y_s, y_t) \right\}^2,$$

где $f^j(x_p, y_j)$ — функции из обучающего множества, M — количество функций обучающего множества, α — параметр.

Результаты исследования. Представленный выше метод был использован при построении аппроксимационных формул для ряда функций.

Задача 1. Изложенный метод был применен при построении аппроксимационной формулы для функции $f(x) = \cos(10,5 \cdot x^2 + 4,5) \cdot x$. При этом полагалось $N = 45, M = 35, x \in [0, 1]$. В аппроксимационной формуле использовалась функция $K_3(x, z)$. В качестве обучающего множества использовались смещенные полиномы Чебышева $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos(2x - 1))$, $n = 1, \dots, M$.

Параметры α и s определялись простым перебором. Выбирались те значения этих параметров, при которых коэффициент детерминации, определенный по заданным значениям функции $f(x)$ в точках x_i и вычисленным в этих же точках по аппроксимационной формуле, был больше.

На рис. 1 представлены результаты аппроксимации. Сплошной линией (1) изображен график исходной функции, а пунктирной линией (2) изображен результат аппроксимации. Точность аппроксимации оценивалась по коэффициенту детерминации, который в данном случае был равен 0,9974.

Этот подход был использован при решении задачи экстраполяции. Для этого при определении коэффициентов a_i к тому множеству точек $x \in [0, 1]$ $i = 1, \dots, N$, на котором заданы значения аппроксимируемой функции в выражении $J(a_i)$, следует добавить точки x_i из того множества $[b, d]$, на которое будет распространен процесс экстраполяции. В рассмотренном примере это множество $[1, 1,05]$. На этом отрезке было добавлено равномерно 7 точек. Полученный результат представлен на рис. 2. При этом коэффициент детерминации равнялся 0,9673.

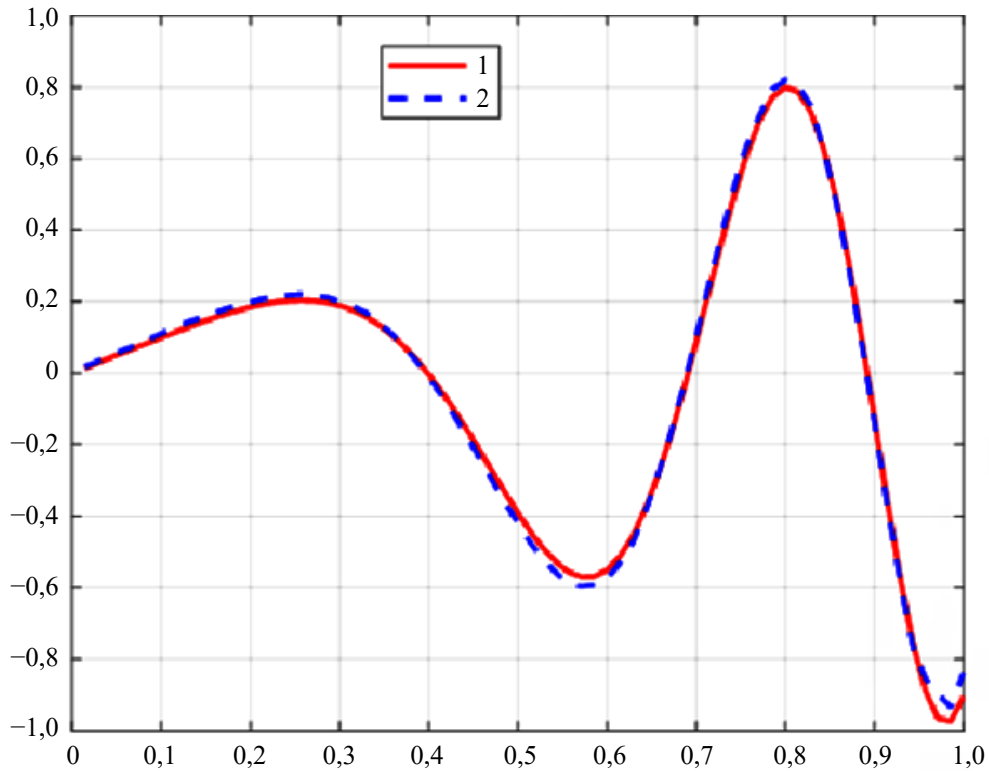


Рис. 1. Аппроксимация функции $f(x) = \cos(10,5 \cdot x^2 + 4,5) \cdot x$

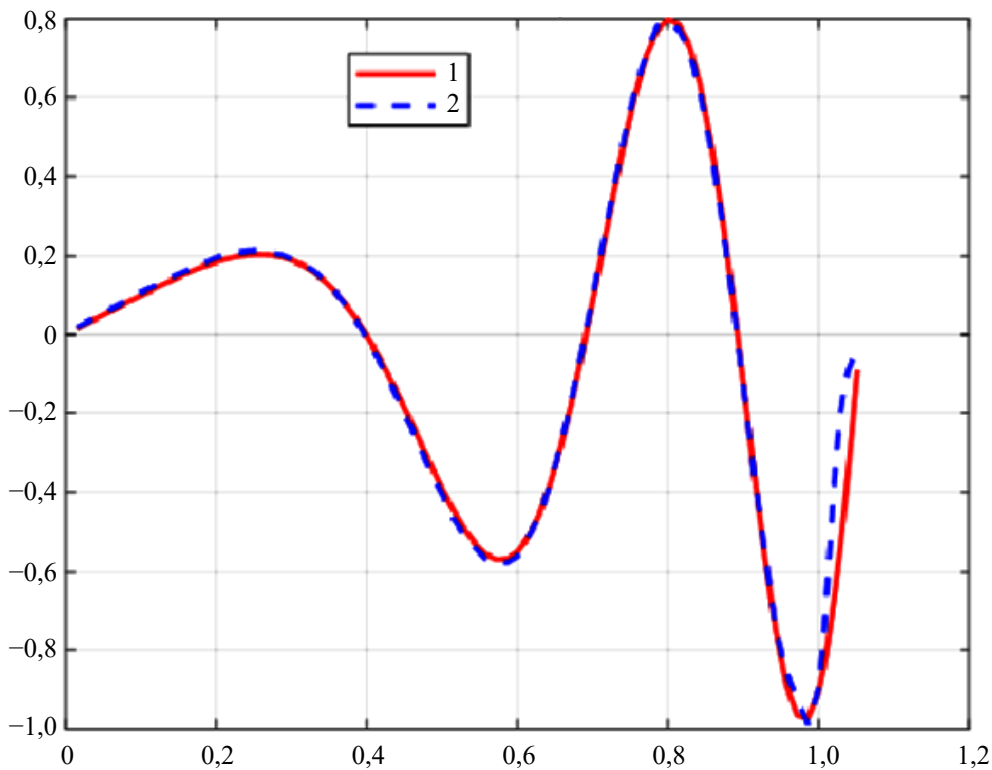


Рис. 2. Экстраполяция функции $f(x) = \cos(10,5 \cdot x^2 + 4,5) \cdot x$

Задача 2. Данный метод был применен при построении аппроксимационной формулы для функции с угловой точкой $f(x) = 1/(1 + 5 \cdot \text{abs}(x - 0,5))$.

При этом все параметры оставались теми же, что и в задаче 1. Результат аппроксимации представлен на рис. 3. Коэффициент детерминации в этом случае был равен 0,9958.

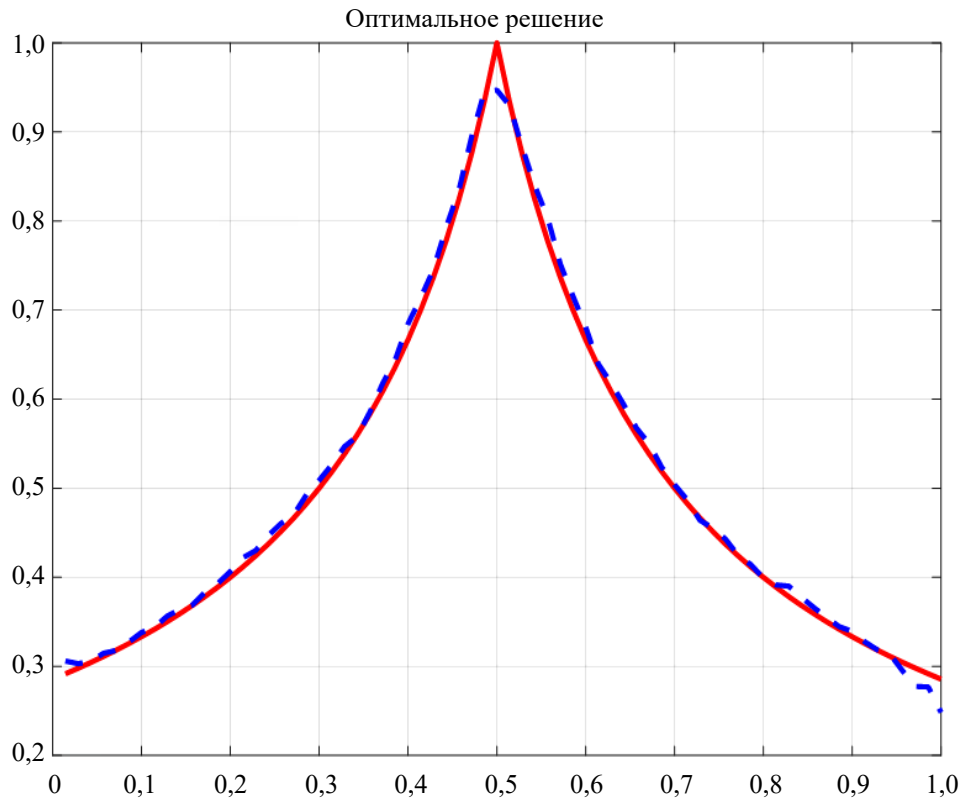


Рис. 3. Аппроксимация функции $f(x) = 1/(1 + 5 \cdot \text{abs}(x - 0,5))$

Задача 3. Рассматривается построение аппроксимационной формулы для функции $f(x) = \cos(10,5 \cdot x^2 + 4,5) \cdot x$, значения которой $f(x_i)$ заданы с погрешностью $\varepsilon_i = (\varepsilon - 0,5) \cdot 0,21$, где ε — равномерно распределенная случайная величина, принимающая значения от 0 до 1. При этом полагалось $N = 45$, $M = 35$, $x \in [0, 1]$, в аппроксимационной формуле использовалась функция $K_2(x, z)$, в качестве обучающего множества использовались смещенные полиномы Чебышева. Полученные результаты представлены на рис. 4. Линия (1) — график функции $f(x)$, линия (2) — результат аппроксимации, линия (3) — график функции $f(x) + \varepsilon$.

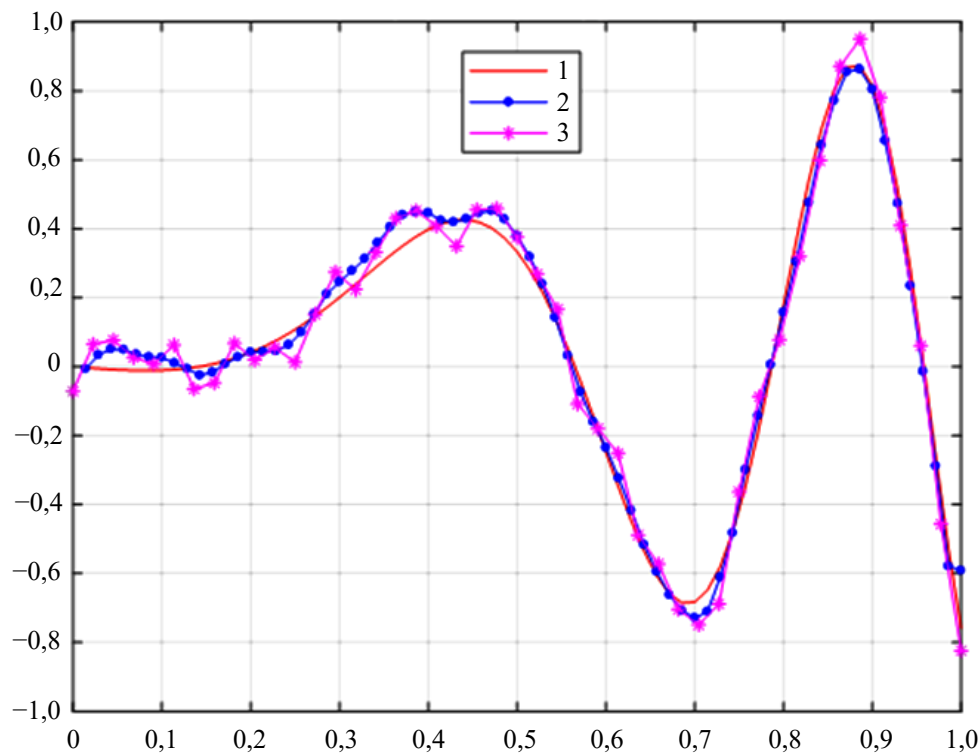


Рис. 4. Аппроксимация функции $f(x) = \cos(10,5 \cdot x^2 + 4,5) \cdot x$, заданной с погрешностью

Коэффициент детерминации в этом случае равнялся 0,9880.

Задача 4. Рассматривалась аппроксимация функции двух переменных:

$$f(x, y) = 1 - \cos(2\pi x) \cdot \cos(2\pi y),$$

$$f(x) = \cos(10,5 \cdot x^2 + 4,5) \cdot x.$$

При этом полагалось $N_x = 21$, $N_y = 21$, $M = 25$. В качестве обучающего множества использовались функции $T_n(x)$, $T_m(y)$, представляющие собой произведение смещенных полиномов Чебышева. Для построения аппроксимационной формулы использовалась дробно-рациональная функция $P_2(x, u, y, v)$. Результаты аппроксимации изображены на рис. 5.

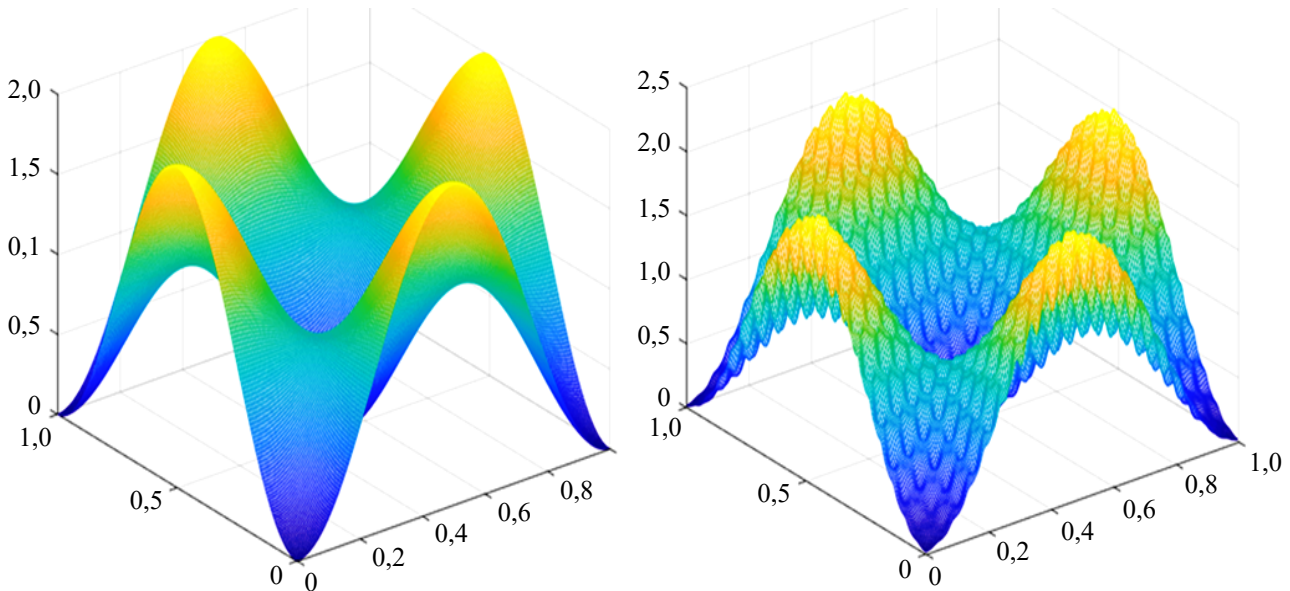


Рис. 5. Аппроксимация функции $f(x, y) = 1 - \cos(2\pi x) \cdot \cos(2\pi y)$

Слева представлено изображение графика функции, а справа — изображение графика аппроксимации. Коэффициент детерминации в этом случае равнялся 0,9718.

Задача 5. Рассматривалась аппроксимация функции двух переменных $f(x, y) = \exp(-\beta \cdot \sqrt{(x-0,5)^2 + (y-0,5)^2})$, имеющую особую точку $(0,5; 0,5)$. При этом для построения аппроксимационной формулы использовалась дробно-рациональная функция $P_3(x, u, y, v)$ и полагалось $\beta = 9$. Все параметры имели те же значения, что и в предыдущей задаче.

Полученные результаты представлены на рис. 6.

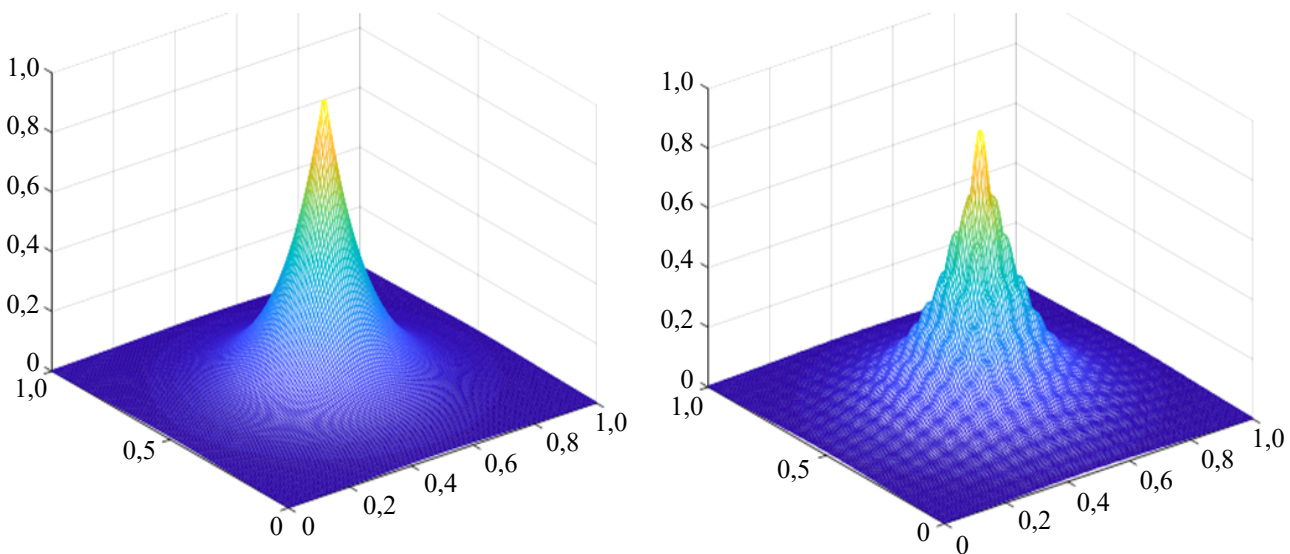


Рис. 6. Аппроксимация функции $f(x, y) = \exp(-\beta \cdot \sqrt{(x-0,5)^2 + (y-0,5)^2})$

Коэффициент детерминации равен 0,9898.

Обсуждение. Результаты исследования наглядно продемонстрировали достоинства примененного метода, которые проявились не только при решении задач аппроксимации. Метод показал хорошие результаты и при

решении задач экстраполяции, задач аппроксимации функций, значения которых заданы с погрешностью, при решении задач аппроксимации функций двух переменных. Отличительной чертой метода является то, что в качестве функций активации используются дробно-рациональные функции дельтообразного поведения. Это функции, принимающие значения существенно отличные от нуля на некотором небольшом отрезке числовой оси. Это приводит к тому, что при определении весов нейронной сети решаются системы линейных уравнений, имеющих матрицы с диагональным преобладанием, то есть хорошо обусловленные. Это является одной из причин достаточно высокой степени точности результатов аппроксимации.

Заключение. Представленные результаты позволяют сделать вывод о том, что использование дробно-рациональных функций в качестве функций активации при построении нейронных сетей для решения задач аппроксимации является достаточно эффективным методом. Стоит отметить перспективность применения подобных подходов для решения задач, связанных с цифровой обработкой сигналов.

Список литературы / References

1. Колмогоров А.Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиции непрерывных функций одного переменного. *Доклады АН СССР*. 1957;114(5):953–956.
Kolmogorov A.N. On the representation of continuous functions of several variables as a superposition of continuous functions of one variable. *Doklady Akad. Sci.* (1957);114(5):953–956. (In Russ.)
2. Арнольд В.И. О представлении функций нескольких переменных в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных. *Математическое просвещение*. 1958;3:41–61.
Arnold V. I. On the representation of functions of several variables as a superposition of functions of fewer variables. *Mathematical Education*. 1958;3:41–61. (In Russ.)
3. Воевода А.А., Романников Д.О. Синтез нейронных сетей с несколькими переменными. *Сборник научных трудов НГТУ*. 2018;1(91):86–94. <https://doi.org/10.17212/2307-6879-2018-1-86-94>
Voevoda A.A., Romannikov D.O. Synthesis of neural networks with several variables. *Proceedings of NSTU*. 2018;1(91):86–94. (In Russ.) <https://doi.org/10.17212/2307-6879-2018-1-86-94>
4. Романников Д.О. О синтезе нейронных сетей. *Сборник научных трудов НГТУ*. 2018;1(91):104–111. <https://doi.org/10.17212/2307-6879-2018-1-104-111>
Romannikov D.O. On the synthesis of neural networks. *Proceedings of NSTU*. 2018;1(91):104–111. (In Russ.) <https://doi.org/10.17212/2307-6879-2018-1-104-111>
5. Маршалко Г.Б., Труфанова Ю.А. Полиномиальные аппроксимации некоторых функций активации нейронных сетей. *Информатика и автоматизация*. 2022;21(1):161–180.
Marshalko G.B., Trufanova Yu.A. Polynomial approximations of some activation functions of neural networks. *Informatics and automation*. 2022;21(1):161–180.
6. Чертков А.А., Сабуров С.В., Каск Я.Н. Алгоритм идентификации параметров моделей производственных функций при помощи нейронной сети. *Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова*. 2023;15(6):1096–1104. <https://doi.org/10.21821/2309-5180-2023-15-6-1096-1104>
Chertkov A.A., Saburov S.V., Kask Ya.N. An algorithm for identifying parameters of production function models using a neural network. *Bulletin of the Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping*. 2023;15(6):1096–1104. (In Russ.) <https://doi.org/10.21821/2309-5180-2023-15-6-1096-1104>
7. Галкин В.А., Гавриленко Т.В., Смородинов А.Д. Некоторые аспекты аппроксимации и интерполяции функций искусственными нейронными сетями. *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*. 2022;38(1):54–73. <https://doi.org/10.26117/20796641-2022-38-1-54-73>
Galkin V.A., Gavrilenko T.V., Smorodinov A.D. Some aspects of approximation and interpolation of functions by artificial neural networks. *Vestnik KRAUNC. Phys.-Math. Sciences*. 2022;38(1):54–73. (In Russ.) <https://doi.org/10.26117/20796641-2022-38-1-54-73>
8. Hanin B. Universal Function Approximation by Deep Neural Nets with Bounded Width and ReLU Activations. *Mathematics*. 2019;7(10):992.
9. Guliyev N.J., Ismailov V.E. Approximation capability of two hidden layer feedforward neural networks with fixed weights. *Neurocomputing*. 2018;316:262–269.
10. Liu B., Liang Y. Optimal function approximation with ReLU neural networks. *Neurocomputing*. 2021;435:216–227.
11. Almira J.M., Lopez-de-Teruel P.E., Romero-L'opez D.J., Voigtlaender F. Negative results for approximation using single layer and multilayer feedforward neural networks. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2021;494:124584.
12. Ермаков Б.С. Влияние структуры искусственной нейронной сети на ее эффективность на примере прогнозирования макроэкономических показателей. *Системный анализ и логистика*. 2021;2(28):44–51. <https://doi.org/10.31799/2077-5687-2021-2-44-51>
Ermakov B.S. The influence of the structure of an artificial neural network on its performance: the example of forecasting macroeconomic indicators. *Systems Analysis and Logistics*. 2021;2(28):44–51. (In Russ.) <https://doi.org/10.31799/2077-5687-2021-2-44-51>

13. Chudziak, A., Predictability of stock returns using neural networks: Elusive in the long term. *Expert systems with applications*. 2023;213(C):119203.

14. Maniatopoulos A., Gazis A. Technical analysis forecasting and evaluation of stock markets: the probabilistic recovery neural network approach. *International journal of economics and business research*. 2023;1:64–100.

15. Галабурдин А.В. Применение нейронных сетей при решении эллиптических уравнений для областей сложной формы. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(2):44–51. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-2-44-51>

Galaburdin A.V. Application of neural networks in solving elliptic equations for domains of complex shape. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(2):44–51. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-2-44-51>

16. Галабурдин А.В. Применение нейронных сетей для решения задачи Дирихле для областей сложной формы. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(2):68–79. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-2-68-79>

Galaburdin A.V. Application of neural networks to solve the Dirichlet problem for domains of complex shape. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(2):68–79. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-2-68-79>

Об авторе:

Александр Васильевич Галабурдин, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и информатики Донского государственного технического университета (Российская Федерация, 344003, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [ORCID](#), [SPIN-код](#), Galaburdin@mail.ru

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

About the Author:

Alexander V. Galaburdin, Cand.Sci. (Phys. – math.), Associate Professor, Associate Professor of the Department Mathematics and Informatics, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), Galaburdin@mail.ru

Conflict of Interest Statement: the author declares no conflict of interest.

The author has read and approved the final version of manuscript.

Поступила в редакцию / Received 12.02.2026

Поступила после рецензирования / Reviewed 10.03.2026

Принята к публикации / Accepted 26.03.2026

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

INFORMATION TECHNOLOGIES



УДК 519.6

Оригинальное теоретическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2026-10-1-58-71>


Обнаружение разливов нефти на основе усовершенствованных LBP-нейроалгоритмов для зашумленных космических снимков

А.И. Сухинов , Д.А. Соломаха , В.В. Сидорякина  

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

 cvv9@mail.ru

Аннотация

Введение. Обнаружение разливов нефти на спутниковых изображениях представляет собой значительную проблему из-за низкого визуального контраста между нефтяными пятнами и морским фоном, особенно при изменяющихся условиях освещения и шумах датчиков. Традиционные подходы обычно преобразуют *RGB*-изображения в оттенки серого перед анализом текстуры, отбрасывая данные о длине волны, критически важные для различения типов и толщины нефти. В настоящей работе предложен новый подход к обработке каждого канала *Local Binary Pattern (LBP)* с архитектурой *Pyramid Scene Parsing Network (PSPNet)*, который обрабатывает каждый *RGB*-канал независимо, сохраняя спектрально-текстурные характеристики, необходимые для точной идентификации нефтяных разливов.

Материалы и методы. Модифицированный подход сохраняет три параллельных потока *LBP*, которые фиксируют текстурные паттерны, специфичные для каждого канала, и объединяются с исходным *RGB*-входом для формирования шестиканального тензора при обработке глубоким обучением. Обучение включает комплексные стратегии увеличения шума, имитирующие реальные условия дистанционного зондирования.

Результаты исследования. Экспериментальная проверка показывает, что данный подход достигает среднего значения пересечения по объединению (mIoU) 86,05 % на тестовом наборе данных, что представляет собой улучшение на 3,25 % по сравнению с традиционными реализациями *LBP* в оттенках серого. Критически важно, что представленная модель демонстрирует исключительную устойчивость к шуму по сравнению с моделями, основанными на традиционных подходах.

Обсуждение. Стратегия обработки по каналам эффективно отличает тонкие нефтяные пленки от явлений, похожих на разливы (блики солнца на поверхности воды, ветровое волнение).

Заключение. Полученные в работе результаты вносят вклад в разработку систем оперативного мониторинга нефтяных разливов, требующих надежной работы в различных природных условиях и сценариях съемки.

Ключевые слова: *PSPNet*, *LBP*, обнаружение разлива нефти, сегментация изображений

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22–11–00295–П, <https://rscf.ru/project/22-11-00295/>

Для цитирования. Сухинов А.И., Соломаха Д.А., Сидорякина В.В. Обнаружение разливов нефти на основе усовершенствованных LBP-нейроалгоритмов для зашумленных космических снимков. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2026;10(1):58–71. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2026-10-1-58-71>

Oil Spill Detection Based on Enhanced LBP Neural Algorithms for Noisy Satellite Images

Alexander I. Sukhinov , Denis A. Solomakha , Valentina V. Sidoryakina 

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

✉ cvv9@mail.ru

Abstract

Introduction. Detecting oil spills in satellite imagery presents a significant challenge due to the low visual contrast between oil slicks and the sea background, particularly under varying illumination conditions and sensor noise. Traditional approaches typically convert RGB images to grayscale prior to texture analysis, discarding wavelength data critical for distinguishing oil types and thicknesses. This paper proposes a novel approach to processing each Local Binary Pattern (LBP) channel using a Pyramid Scene Parsing Network (PSPNet) architecture, which processes each RGB channel independently, preserving the spectral-textural characteristics necessary for accurate oil spill identification.

Materials and Methods. The modified approach retains three parallel LBP streams that capture channel-specific texture patterns, which are concatenated with the original RGB input to form a six-channel tensor for deep learning processing. Training incorporates comprehensive noise augmentation strategies simulating real-world remote sensing conditions.

Results. Experimental validation demonstrates that the proposed approach achieves a mean Intersection over Union (mIoU) of 86.05% on the test dataset, representing a 3.25% improvement over traditional grayscale LBP implementations. Critically, the presented model exhibits exceptional noise robustness compared to models based on conventional approaches.

Discussion. The per-channel processing strategy effectively distinguishes thin oil films from spill-like phenomena (sun glint on the water surface, wind-induced disturbances).

Conclusion. The results obtained in this study contribute to the development of operational oil spill monitoring systems requiring reliable performance under diverse environmental conditions and imaging scenarios.

Keywords: PSPNet, LBP, oil spill detection, image segmentation

Funding. The study was supported by the Russian Science Foundation grant No. 22-11-00295-П, <https://rscf.ru/en/project/22-11-00295/>

For Citation. Sukhinov A.I., Solomakha D.A., Sidoryakina V.V. Oil Spill Detection Based on Enhanced LBP Neural Algorithms for Noisy Satellite Images. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2026;10(1):58–71. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2026-10-1-58-71>

Введение. Разливы нефти представляют собой одну из самых серьезных экологических проблем, связанных с добычей и транспортировкой углеводородов, вызывая разрушительное воздействие на морские экосистемы, рекреационные системы и прибрежную экономику [1–4]. Даже небольшие разливы нефти могут привести к образованию крупных пятен, которые течения переносят на песчаные пляжи, простирающиеся вдоль трети мировых береговых линий [4]. Токсичные компоненты нефти нарушают процессы фотосинтеза, оказывают отрицательное влияние на живые организмы, обитающие в морских водах [5–9].

Для минимизации ущерба своевременное обнаружение и локализация разливов имеют критическое значение. Традиционные методы, такие как отбор проб и контактные исследования, имеют ограничения, связанные с охватом водных акваторий, отсутствием оперативной скорости, высокой стоимостью [4]. Дистанционное зондирование через спутниковые изображения, радиолокационные данные и аэрофотосъемку предоставляют жизнеспособную альтернативу. Однако точность таких подходов зависит от сложности формы, размера и направления распространения разлива, особенно для удаленных морских районов [10].

Опираясь на [11, 12], авторы принципиально улучшают конвейер обработки *LBP*, модифицируя его с реализации на основе оттенков серого на стратегию обработки по каналам с интегрированными механизмами устойчивости к шуму. Оригинальная модель *LBP+PSPNet* преобразовывала *RGB*-вход в оттенки серого перед вычислением *LBP*, что приводило к потере ценной текстурной информации, специфичной для каналов. В расширенном подходе обрабатывается каждый цветовой канал независимо, сохраняя текстуру, зависящую от длины волны, которая критически важна для различения нефтяных пятен от похожих фоновых паттернов. Это архитектурное улучшение напрямую решает ключевое ограничение в предыдущей реализации, где информация о текстуре, специфичной для каналов, терялась в процессе преобразования в оттенки серого, значительно улучшая способность модели различать различные типы нефти и фоновые элементы в сложных природных условиях.

Реализация *LBP* по каналам обеспечивает три критических преимущества по сравнению с традиционным подходом в оттенках серого. Во-первых, *LBP* для синего канала фиксирует паттерны границы «нефть — вода», которые невидимы в представлении в оттенках серого, поскольку нефть поглощает синие длины волн иначе, чем вода [10]. Это особенно ценно для обнаружения тонких нефтяных пленок, где спектральные различия наиболее выражены в синем спектре. Во-вторых, *LBP* для красного канала выявляет тонкие текстурные различия, связанные с вариациями толщины нефти, поскольку более толстая нефть накапливает большее поглощение красного

света, создавая характерные паттерны, которые усредняются при преобразовании в оттенки серого [9]. В-третьих, обработка зеленого канала фиксирует взаимодействия в среднем спектре, которые обеспечивают дополнительную информацию другим каналам, улучшая общую дифференцирующую способность в сложных прибрежных сценариях.

Вычислительные расходы разработанного подхода минимальны по сравнению с исходным методом. Эта эффективность сохраняется за счет реализации *LBP* по каналам как трех параллельных сверточных слоев с фиксированными весами, избегая необходимости дополнительных обучаемых параметров [13, 14]. Способность модели использовать текстурные паттерны, специфичные для каналов, при сохранении устойчивости к шуму представляет собой значительный прогресс для оперативных систем мониторинга нефтяных разливов. Метод практичен для работы в реальном времени, где вычислительные ресурсы ограничены, обеспечивая превосходную производительность в сложных сценариях обнаружения.

Материалы и методы

Обзор набора данных. Набор данных, использованный в этом исследовании, состоит из *RGB*-изображений, специально подобранных для задач обнаружения и классификации нефтяных разливов. Окончательный набор данных включает 8376 обучающих, 41 валидационное и 75 тестовых изображений, стандартизированных до единого разрешения 512×512 пикселей через систематическую предварительную обработку.

Набор данных включает четыре различных класса нефти, каждый из которых характеризуется специфически визуальными свойствами, соответствующими разной толщине нефти: черная нефть представлена как (255, 255, 255), коричневая нефть как (180, 180, 180), радужная нефть как темно-желтая (123, 123, 123), светло-желтая как серебряная (123, 123, 123), фон представлен как (0, 0, 0). Эта многоклассовая структура позволяет не только обнаруживать, но и количественно оценивать разные толщины нефти, предоставляя критически важную информацию для планирования экологических мер реагирования.

Методология аннотации следует принципам семантической сегментации, с преднамеренно поддерживаемыми небольшими промежутками между соседними нефтяными областями для обеспечения точной классификации границ. Каждое изображение содержит тщательно отобранные нефтяные области, которые составляют от 20 % до 90 % общей площади изображения, обеспечивая значимые обучающие образцы и избегая неоднозначных случаев с минимальным или чрезмерным покрытием нефтью.

Тестовый набор был специально подобран, чтобы включать сложные сценарии с малыми нефтяными пятнами, помехами от солнечных бликов и изображениями, содержащими несколько типов нефти, обеспечивая строгую оценочную рамку для производительности модели. Этот комплексный набор данных представляет собой уникальный ресурс для классификации нефтяных разливов, так как систематически классифицирует типы нефти на основе визуальных характеристик, а не сосредотачивается исключительно на двоичном обнаружении нефть/фон.

Предложенный модифицированный алгоритм *LBP*. Традиционный подход *LBP* обычно преобразует *RGB*-изображения в оттенки серого перед анализом текстуры, что приводит к потере информации из цветовых каналов. Чтобы уйти от этого ограничения, авторы предлагают модифицированный алгоритм *LBP*, который обрабатывает каждый цветовой канал независимо, сохраняя при этом исходную цветовую информацию. Этот подход сохраняет различные текстурные характеристики, присутствующие в каждой спектральной полосе, что особенно важно для обнаружения нефтяных разливов, где разные типы нефти демонстрируют уникальные спектральные сигнатуры.

Пусть $I_{RGB}(x, y) = [R(x, y), G(x, y), B(x, y)]$ обозначает *RGB*-изображение в координатах пикселя (x, y) . Для каждого канала $c \in \{R, G, B\}$ модифицированный оператор *LBP* определяется как

$$LBP_c(x, y) = \sum_{k=1}^8 s(p_k^c - p_c^c) \cdot 2^{k-1}, \quad (1)$$

где p_c^c — значение центрального пикселя в канале c ; p_k^c — k -й соседний пиксель в том же канале; s — функция пороговой обработки:

$$s = s(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x \leq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Эта операция выполняется отдельно для каждого из трех цветовых каналов, в результате чего получаются три различных *LBP*-карты: LBP_R , LBP_G , LBP_B . В отличие от традиционного подхода, который объединяет цветовую информацию через преобразование в оттенки серого, разработанный авторами метод сохраняет полную цветовую текстурную информацию за счет независимой обработки каждого канала.

Модифицированный алгоритм использует фиксированную конфигурацию окрестности 3×3, где центральный пиксель сравнивается с его восемью ближайшими соседями [15]. Двоичный паттерн, сгенерированный для каждого пикселя, затем преобразуется в десятичное значение, представляющее локальный текстурный паттерн. Этот процесс повторяется для всех пикселей в каждом канале, производя три текстурные карты, которые фиксируют текстурную информацию, специфичную для канала.

Улучшенное представление текстуры. Предложенный подход к независимой обработке каналов *LBP* обеспечивает значительно более богатое представление текстуры по сравнению с традиционными методами на основе оттенков серого. Сохраняя отдельный анализ текстуры для каждого *RGB*-канала, алгоритм фиксирует цвето-

зависимые текстурные характеристики, которые важны для различения нефтяных разливов и похожих явлений, таких как солнечные блики или биологические пленки.

Трехканальное представление текстуры $LBP_{RGB}(x, y) = [LBP_R(x, y), LBP_G(x, y), LBP_B(x, y)]$ сохраняет уникальные текстурные сигнатуры, связанные с разной толщиной и типами нефти. Например, серебряная нефть обычно демонстрирует характерные текстурные паттерны в синем канале, в то время как радужная нефть показывает характерные паттерны по всем трем каналам. Эта цветоспецифическая текстурная информация предоставляет дополнительные дифференцирующие признаки, которые улучшают способность модели различать типы нефти и фоновые элементы.

Улучшенное представление текстуры может быть интегрировано в архитектуры глубокого обучения путем конкатенации трех карт LBP с исходным RGB -изображением, формируя шестиканальный входной тензор. Этот обогащенный вход позволяет сети использовать как спектральную, так и текстурную информацию одновременно, значительно улучшая производительность сегментации в сложных условиях, где визуальный контраст между нефтью и водой минимален.

Экспериментальные результаты демонстрируют, что этот подход к независимой обработке каналов увеличивает метрику IoU на 3,25 % по сравнению с традиционным LBP в оттенках серого, особенно улучшая обнаружение серебряной и радужной нефти, которые ранее страдали от высоких показателей ложных срабатываний из-за их схожести с солнечными бликами и другими фоновыми элементами.

Структура модели. Предложенная архитектура модели интегрирует текстурное извлечение LBP , независимое по каналам, с базовой сетью на основе $ResNet101$ и $PSPNet$ для улучшенной сегментации нефтяных разливов. Модель обрабатывает шестиканальный входной тензор, который объединяет исходные RGB -каналы с тремя отдельными каналами LBP , вычисленными независимо для каждого цветового канала.

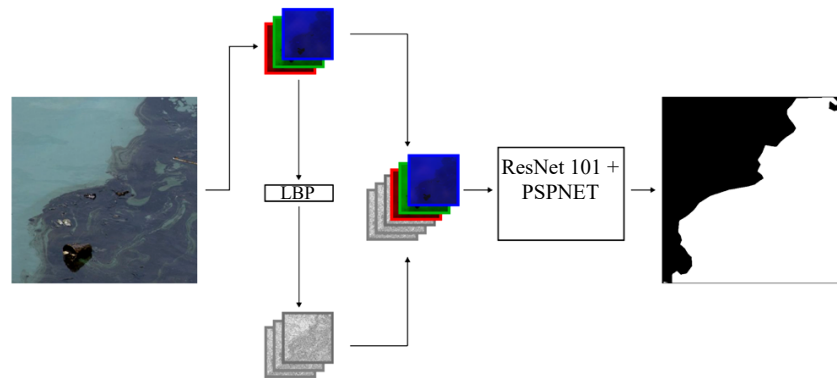


Рис. 1. Архитектура $LBP + PSPNet$

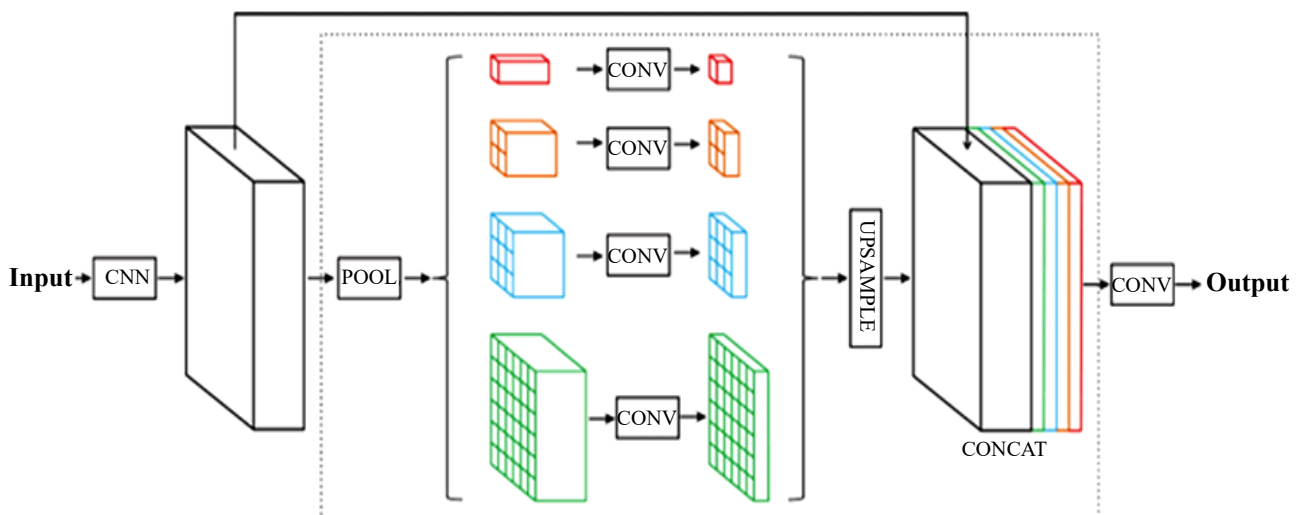


Рис. 2. Архитектура $PSPNet$

В модифицированную базовую сеть $ResNet101$ подается шестиканальный тензор ($B \times 6 \times H \times W$), где B — размер пакета, H и W — его высота и ширина. Параметры первого сверточного слоя адаптированы для учета увеличенного измерения измерения канала: 6 входных каналов, 64 выходных канала, размер ядра 7×7 , шаг 2. Остальные слои ($BatchNorm$, $ReLU$, $MaxPool$ и остаточные блоки) сохраняются из стандартной архитектуры $ResNet101$. Выход $ResNet101$ ($B \times 2048 \times H / 32 \times W / 32$) представляет собой многоканальную карту признаков, содержащую пространственную и спектральную информацию о нефтяных разливах.

Для агрегации контекста на нескольких масштабах модуль пирамидального пулинга (*PPM*) обрабатывает тензор признаков через адаптивный средний пулинг на четырех различных масштабах (1×1 , 2×2 , 3×3 и 6×6). Каждая пулинговая карта признаков обрабатывается через сверточный слой, за которым следует билинейное увеличение до исходных пространственных размеров:

$$\text{Stage}(x) = \text{Conv}l \times l(\text{AvgPool}(x)) \uparrow \text{Bilinear}(H, W), \quad (3)$$

где \uparrow обозначает билинейную интерполяцию до исходного размера $H \times W$. Полученные карты признаков конкатенируются с исходным тензором признаков вдоль измерения канала ($B \times 4096 \times H / 32 \times W / 32$), обеспечивая интеграцию локальной и глобальной контекстной информации.

Конкатенированный тензор обрабатывается через последовательность сверток, нормализации и операций *ReLU* с *Dropout* (0,1) для уменьшения размерности до 512 каналов. Затем применяется билинейная интерполяция для восстановления исходных пространственных размеров, за которой следует свертка 1×1 для получения карты логитов ($B \times C \times H \times W$), где C — количество классов (четыре типа нефти плюс фон).

Эта архитектура специально решает проблемы обнаружения нефтяных разливов в условиях низкого контраста за счет сохранения информации о текстуре, специфичной для каналов, через независимую обработку *LBP*, использования более глубокой базовой сети *ResNet101* для более комплексного извлечения признаков и включения анализа контекста на нескольких масштабах через *PPM* для улучшенной сегментации как крупных разливов, так и слабо выраженного загрязнения.

Процесс обучения и оценки. Модель обучалась в течение 200 эпох с начальной скоростью обучения 3×10^{-5} , импульсом 0,9 и уменьшением веса 10^{-5} . Был использован период разогрева в 1500 итераций для обеспечения стабильной сходимости путем постепенного увеличения скорости обучения от начального малого значения до целевого. Этот подход предотвращает большие обновления параметров на ранних этапах обучения, когда веса модели еще случайны и нестабильны, тем самым улучшая стабильность процесса обучения.

Обучение использовало функцию *CrossEntropyLoss* с весами, сбалансированными по классам, чтобы решить конкретные проблемы обнаружения нефтяных разливов. Оптимизатор *AdamW* был выбран за его превосходство над *SGD*. Как показали предыдущие исследования, улучшение mIoU составило 7,84 % при использовании *AdamW* по сравнению с *SGD*. График скорости обучения включал фазу линейного снижения после периода разогрева для облегчения сходимости к оптимальному решению.

Для увеличения данных применяются методы, специально разработанные для имитации реальных условий дистанционного зондирования. К ним относятся случайные горизонтальные и вертикальные отражения, повороты на 90° и добавление гауссовского шума с $\sigma = 0,01$ для повышения устойчивости модели к атмосферным искажениям и эффектам солнечных бликов. Стратегия увеличения данных была тщательно разработана для сохранения целостности паттернов нефтяных разливов при введении реалистичных вариаций в обучающие данные. В отличие от традиционных подходов, которые применяют увеличение ко всему набору данных, разработанный авторами подход применял эти техники только к обучающему набору, оставляя наборы валидации и тестирования без изменений для обеспечения точной оценки производительности.

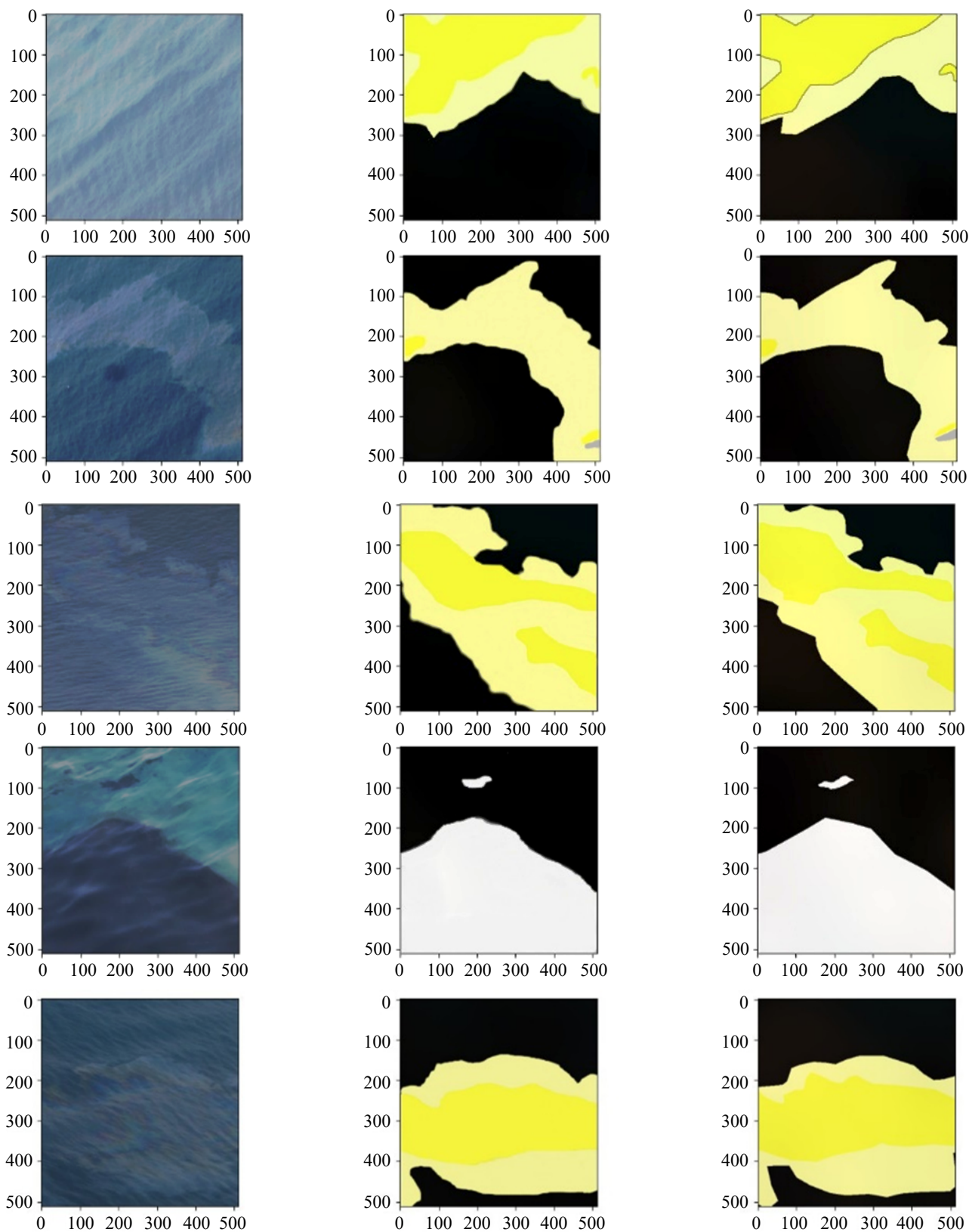
Для оценки модели используется комплексный набор метрик, которые предоставляют дополнительные данные о производительности модели: IoU, F1-мера, точность, mIoU. Эти метрики рассчитывались для каждого типа нефти (черная, коричневая, радужная, серебряная), а также для фоновых классов, обеспечивая детальную оценку производительности модели по различным характеристикам разливов.

Процесс оценки был разработан как комплексный, с особым вниманием к крайним случаям, которые критичны для практического развертывания: малые нефтяные пятна, изображения с помехами от солнечных бликов и изображения, содержащие несколько типов нефти. Этот фокус на сложных сценариях гарантирует, что модель является надежной и устойчивой в реальных условиях, где качество входных данных может быть скомпрометировано природными факторами. Окончательная модель достигла mIoU 86,05 % на тестовом наборе, что представляет собой увеличение на 3,25 % по сравнению с базовой моделью без специализированной техники увеличения данных.

Эти результаты демонстрируют эффективность предложенной архитектуры и методологии обучения для сложной задачи обнаружения и классификации нефтяных разливов, особенно в условиях низкого контраста, где традиционные методы с трудом различают нефтяные разливы и фоновые элементы. Комплексная оценочная рамка гарантирует, что модель обеспечивает надежную производительность по всем типам нефти, делая ее пригодной для практического применения в приложениях экологического мониторинга.

Результаты исследования

Качественный анализ. Чтобы визуально продемонстрировать эффективность подхода *LBP* по каналам, представим несколько типичных примеров, показывающих производительность модели в различных сценариях обнаружения нефтяных разливов. На рис. 3 проиллюстрированы семь тестовых случаев, когда предложенная модель успешно идентифицирует нефтяные разливы в сложных условиях, включая различное освещение, сложные паттерны и фон с низким контрастом.



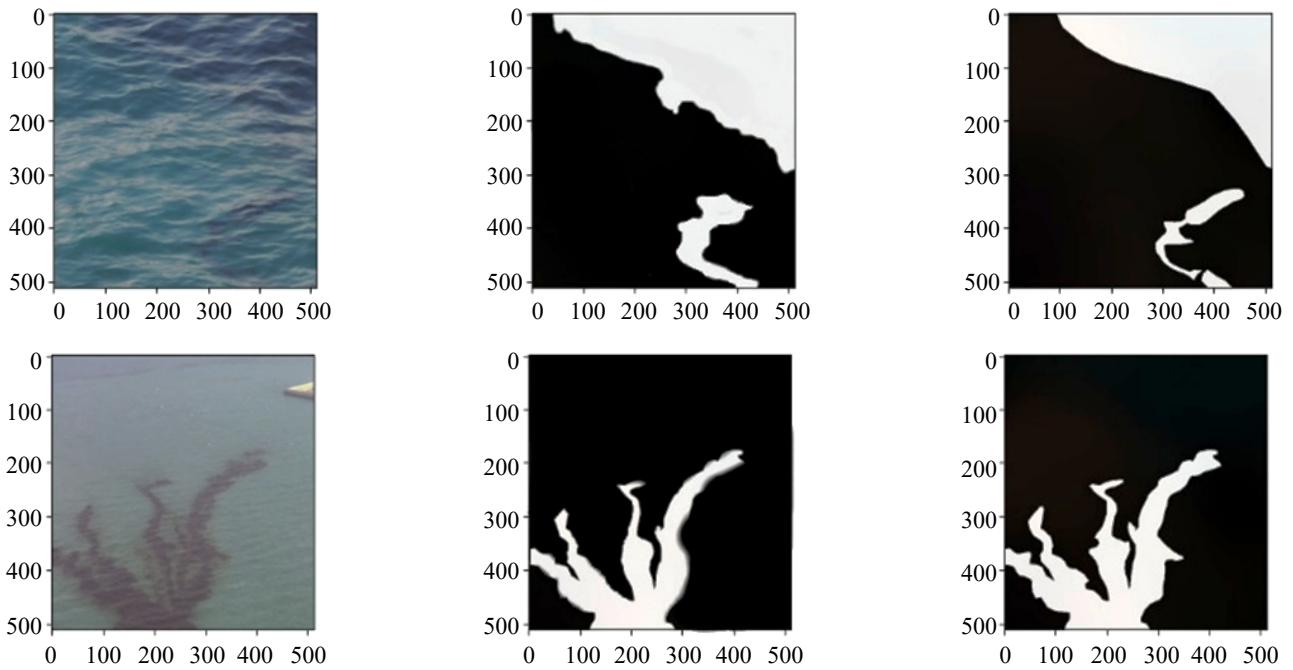


Рис. 3. Качественное сравнение работы предложенной модели на различных сценариях обнаружения разливов нефти

В каждой строке рис. 3 продемонстрировано: слева — исходное *RGB*-изображение, в центре — предсказание модели, справа — эталонная сегментация. Модель успешно идентифицирует разливы нефти в различных условиях, включая разное освещение, сложные паттерны и фоны. Крайняя правая колонка демонстрирует, как подход *LBP* по каналам сохраняет превосходное определение границ по сравнению с традиционными методами. Визуальные результаты подтверждают, что, обрабатывая каждый канал независимо, разработанный подход сохраняет текстуру, зависящую от длины волны, которая важна, чтобы отличить нефть от похожих фоновых элементов. Улучшенное определение границ, видимое в колонке предсказания (крайняя правая), напрямую способствует улучшению *IoU* на 3,25 % по сравнению с традиционными методами *LBP* в оттенках серого, упомянутыми ранее.

Для дальнейшей проверки разработанного подхода авторы провели комплексное сравнение с современными методами обнаружения нефтяных разливов. В таблице 1 представлены количественные результаты по нескольким метрикам оценки.

Таблица 1

Сравнение производительности с современными методами по обнаружению нефтяных разливов (результаты на тестовом наборе)

Метод	mIoU, %	F1-мера, %	Precision, %	Recall, %
<i>U-Net</i>	79,20	81,6	82,3	80,9
<i>PSPNet</i>	81,50	83,4	84,2	82,6
<i>LBP+PSPNet</i> (оттенки серого)	82,80	85,2	86,6	84,2
<i>LBP+PSPNet</i> по каналам	86,05	86,4	87,1	85,7

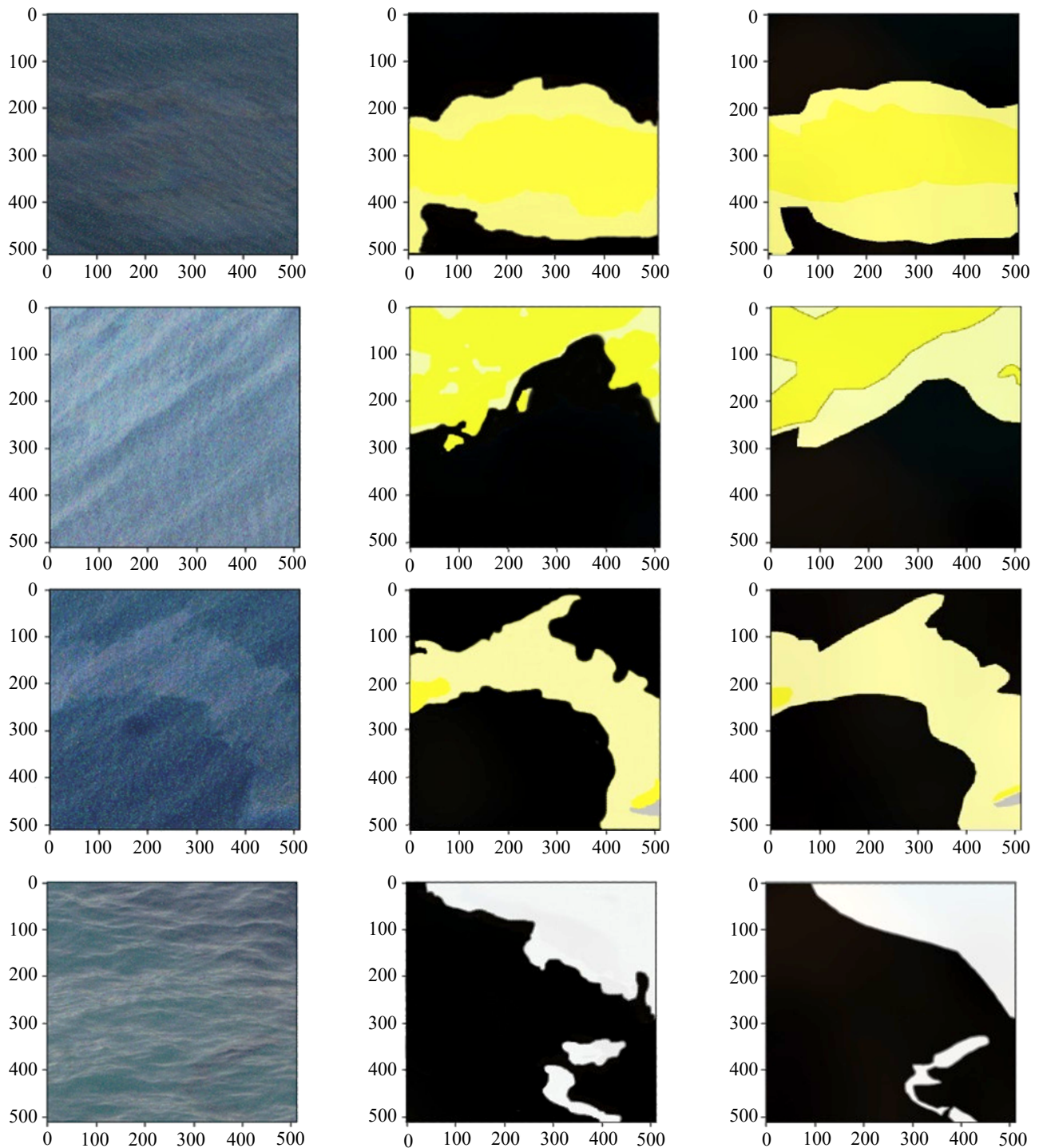
Результаты в таблице 1 демонстрируют, что предложенный подход *LBP+PSPNet* по каналам достигает современного уровня производительности по всем метрикам оценки. Особенно важно, что метод достигает *mIoU* 86,05 %, что представляет собой улучшение на 3,25 % по сравнению с предыдущей реализацией *LBP+PSPNet*. Улучшение *F1*-меры на 1,2 % особенно значимо для оперативного развертывания, так как указывает на лучший баланс между точностью и полнотой.

Сильные показатели точности (87,1 %) и полноты (85,7 %) модели указывают на то, что она успешно минимизирует как ложные срабатывания (нефть классифицируется как вода), так и пропуски (вода классифицируется как нефть), что критично для оперативных систем мониторинга нефтяных разливов. Такая сбалансированная производительность делает модель подходящей как для раннего обнаружения (высокая полнота), так и для распределения ресурсов (высокая точность) в сценариях экологического реагирования.

Устойчивость к шуму. Спутниковые изображения, используемые для обнаружения нефтяных разливов, изначально подвержены различным источникам шума, включая атмосферные помехи, ограничения датчиков и эффекты солнечных бликов. Модифицированная архитектура *PSPNet* с *LBP* по каналам демонстрирует исключительную устойчивость к этим проблемам, снимая критическое ограничение существующих подходов. Для строгой

оценки устойчивости к шуму проведены комплексные эксперименты с несколькими типами шума, обычно встречающимися в приложениях дистанционного зондирования, следуя методологиям, установленным в фундаментальных работах [10, 16].

Следуя [9, 10, 16, 17], смоделированы реалистичные условия шума. Введен гауссовский шум со стандартными отклонениями в диапазоне от $\sigma = 0,01$ до $\sigma = 0,05$, шум «соль-и-перец» с плотностью от 0,05 до 0,20 и пуассоновский шум, имитирующий ограничения датчиков в условиях низкой освещенности. Выбор этих конкретных типов шума основан на обширных исследованиях паттернов деградации изображений дистанционного зондирования. Гауссовский шум эффективно моделирует атмосферные турбулентности и электронный шум датчиков, которые обычно влияют на спутниковые изображения, в то время как шум «соль-и-перец» имитирует артефакты передачи данных и помехи от солнечных бликов, которые особенно проблематичны при съемке поверхности океана. Пуассоновский шум точно представляет ограничения подсчета фотонов в оптических датчиках в условиях низкой освещенности, что критично для мониторинга нефтяных разливов в ночное время.



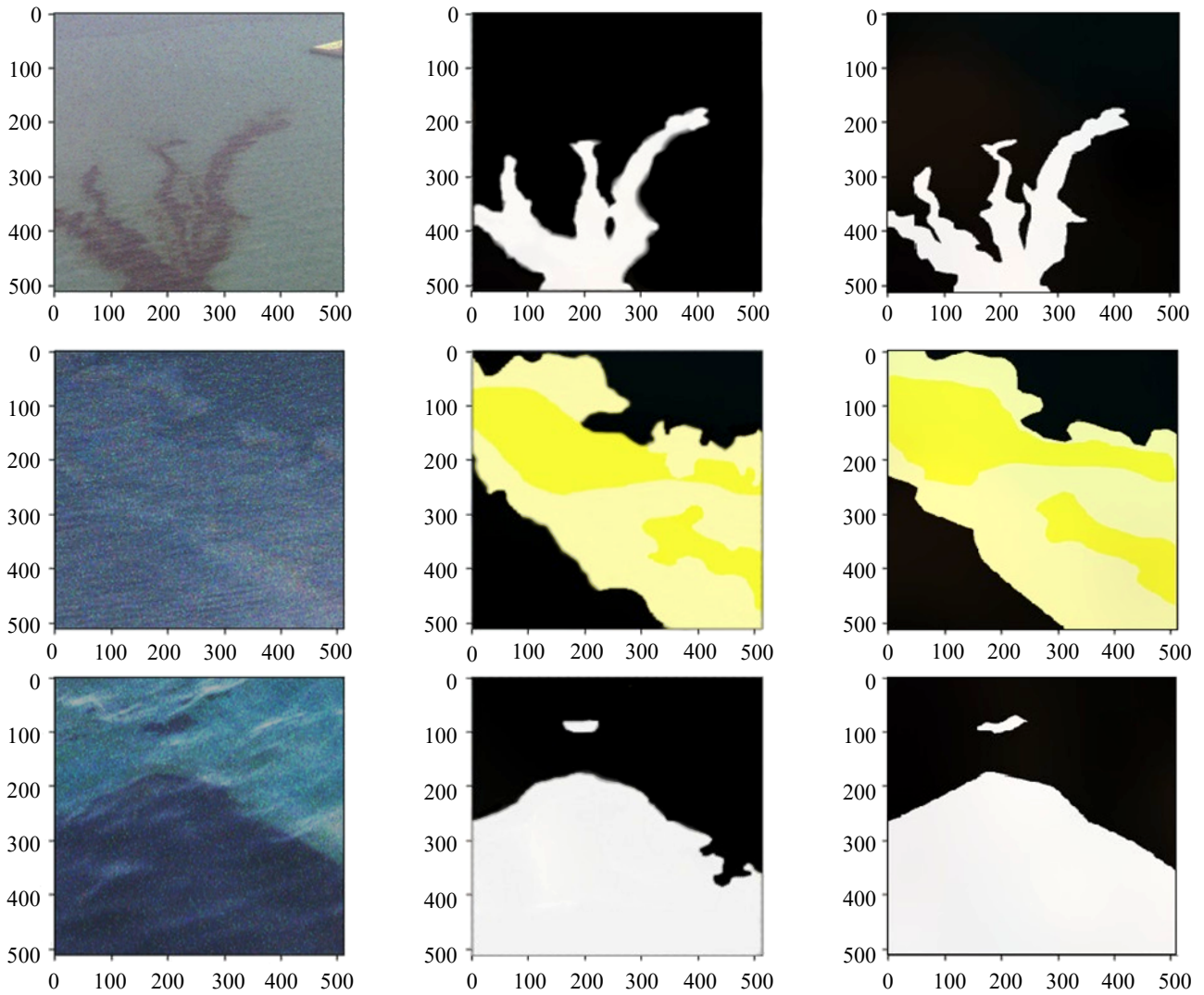
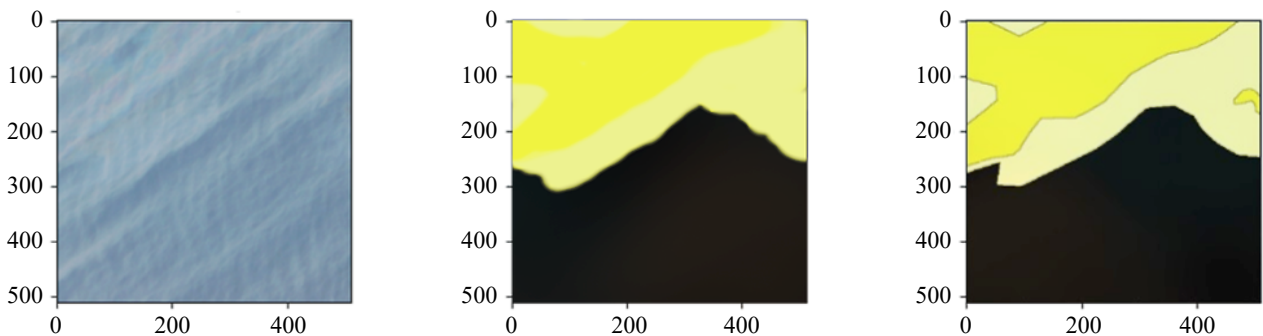
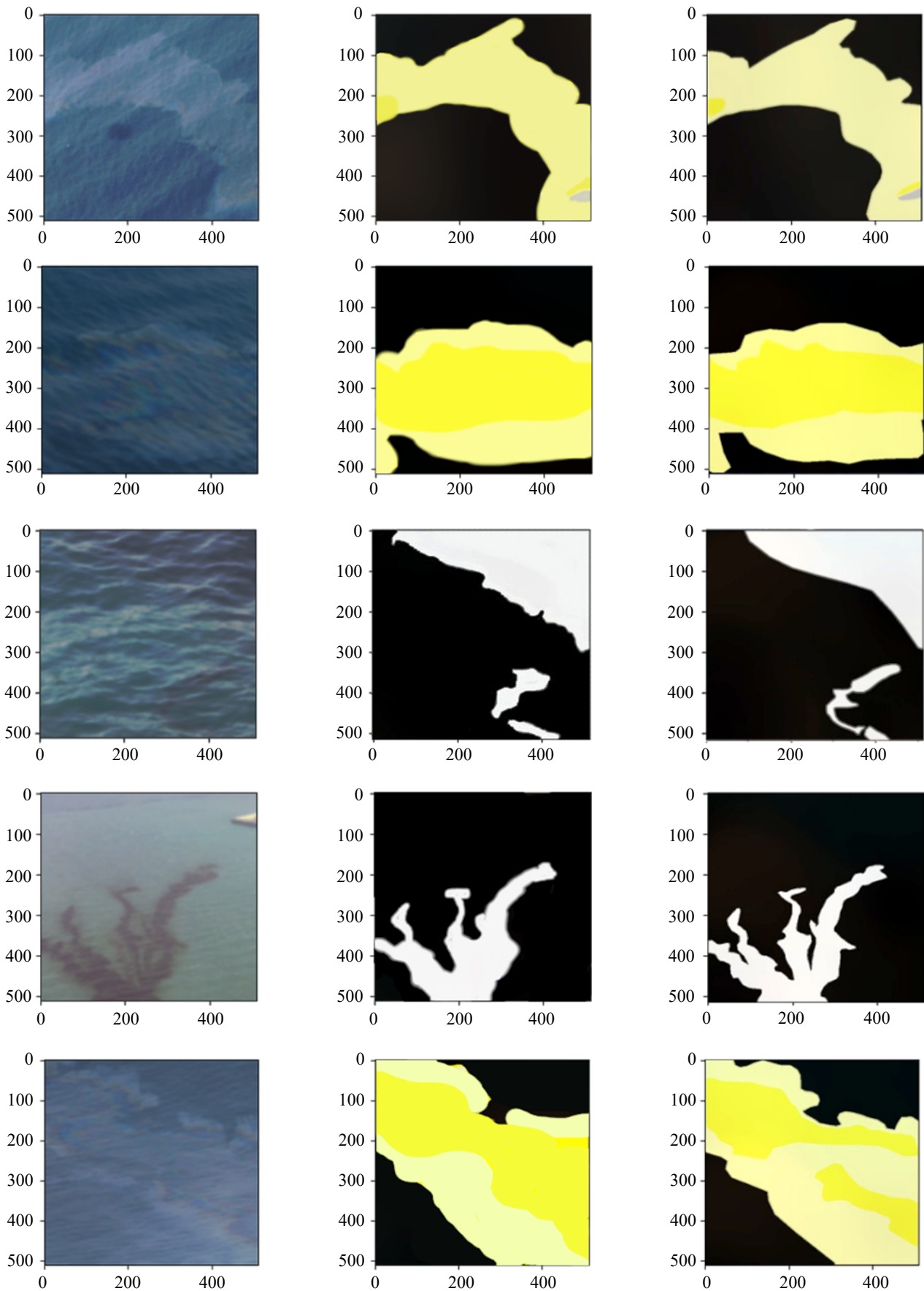


Рис. 4. Визуальная демонстрация работы предложенной модели на космических снимках, искаженных шумом «соль-и-перец»

В каждой строке рис. 4 продемонстрировано: слева — исходное *RGB*-изображение с добавленным шумом «соль-и-перец», в центре — предсказание модели, справа — эталонная сегментация. Несмотря на сильное искажение пикселей, характерное для шума «соль-и-перец», который имитирует эффекты солнечных бликов и артефакты передачи данных, модель сохраняет точные границы сегментации и успешно идентифицирует области разлива нефти различных категорий толщины.

В отличие от традиционных подходов, реализация *LBP* по каналам сохраняет дифференцирующие текстурные признаки даже при высоких уровнях шума. Как показано на рис. 4, модель сохраняет высококачественные границы сегментации и точно идентифицирует области нефтяных разливов, несмотря на значительное зашумление. Визуальные результаты подтверждают, что, обрабатывая каждый канал независимо, подход сохраняет текстуру, зависящую от длины волны, которая помогает отличить нефть от похожих фоновых элементов.





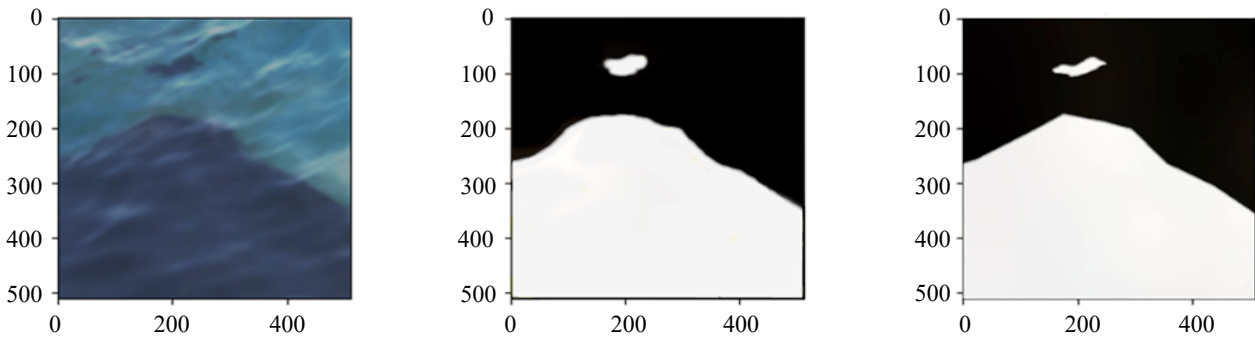


Рис. 5. Визуальная демонстрация работы предложенной модели на космических снимках, искаженных гауссовским шумом

В каждой строке рис. 5 продемонстрировано: слева — исходное *RGB*-изображение с добавленным гауссовским шумом, в центре — предсказание модели, справа — эталонная сегментация. Модель эффективно подавляет атмосферный и сенсорный шум, сохраняя при этом критически важную текстурную информацию, необходимую для различения разливов нефти и фоновых водных поверхностей, демонстрируя превосходное извлечение признаков, зависящих от длины волны, по сравнению с традиционными подходами в оттенках серого.

В отличие от традиционных методологий анализа текстуры, спектрально-канальная реализация *LBP* демонстрирует стабильность при воздействии интенсивного гауссовского зашумления ($\sigma = 0,1$), которое значительно превосходит типичные уровни, встречающиеся в оперативных системах спутникового дистанционного зондирования. Рис. 5 предоставляет убедительные визуальные доказательства этой устойчивости, демонстрируя способность модели сохранять точное определение границ и правильно классифицировать области нефтяных разливов. Эта стабильность производительности является результатом архитектурной инновации поддержания независимых спектральных путей на протяжении всего процесса извлечения текстуры, тем самым защищая критически важные признаки, зависящие от длины волны, которые традиционные одноканальные подходы неизбежно отбрасывают. Значимость этой возможности становится особенно очевидной в сложных сценариях обнаружения, включающих тонкие нефтяные пленки, где даже умеренный гауссовский шум обычно подавляет минимальный спектральный контраст между нефтью и водными поверхностями.

Таблица 2

Сравнение производительности при различных условиях шума (*F1*-мера %)

Тип шума	Уровень шума	<i>LPB+PSPNet</i> в оттенках серого	Предложенный метод
Гауссовский	$\sigma = 0,03$	87,5	88,9
Гауссовский	$\sigma = 0,05$	84,2	86,7
Гауссовский	$\sigma = 0,10$	80,1	83,2
Соль-и-перец	5 %	88,3	90,1
Соль-и-перец	10 %	85,6	88,3
Соль-и-перец	15 %	82,1	85,4
Соль-и-перец	20 %	78,4	81,5
Среднее падение	от 5 % до 20 %	9,8 %	3,1 %

Как показано в таблице 2, в то время как традиционные реализации *LBP* в оттенках серого испытывали падение *F1*-меры на 9,8 %, когда уровень шума увеличивался от 5 % до 20 % [9], разработанная авторами модель сохраняла производительность с лишь 3,1 % снижением в идентичных условиях. Прирост производительности особенно значителен для шума «соль-и-перец» (до 3,3 % улучшения), который имитирует эффекты солнечных бликов, часто осложняющие обнаружение нефтяных разливов. Эта производительность соответствует выводам Ахмеда и др. [16], которые продемонстрировали, что архитектуры глубокого обучения с обработкой по каналам достигают превосходной устойчивости к шуму по сравнению с одноканальными подходами при анализе изображений.

Устойчивость к шуму обусловлена тремя ключевыми архитектурными особенностями. Во-первых, обработка *LBP* по каналам сохраняет текстурные сигнатуры, зависящие от длины волны, которые остаются обнаруживаемыми, даже когда шум искажает один спектральный диапазон. Эта избыточность по каналам создает естественный механизм фильтрации шума, как показали Писано и др. [10], продемонстрировавшие, что мультиспектральные подходы значительно превосходят одноканальные методы при анализе изображений, загрязненных бликами. Во-вторых, многошкальный анализ *Pyramid Scene Parsing Network* эффективно разделяет шумовые паттерны и значимые текстурные признаки за счет анализа пространственной когерентности на разных полях восприятия. В-третьих, разработанная стратегия увеличения данных во время обучения, которая подвергала модель воздей-

ствию разнообразных профилей шума, улучшила ее обобщающие способности. Подход, опирающийся на методы снижения шума, предложенные Писано и Брикке [18], показал, что многошкальный анализ значительно улучшает устойчивость к спекл-шуму в SAR-изображениях и других искажениях, вызванных датчиками.

Обработывая каждый канал независимо через сверточные слои с фиксированными весами, можно сохранить вычислительную эффективность, одновременно значительно улучшая устойчивость к шуму. Этот подход напрямую решает ограничение, выявленное Брикке и Солбергом [10], которые отметили, что существующие системы обнаружения нефтяных разливов справляются с поддержанием согласованной производительности в условиях различного уровня шума и различных систем съемки.

Полученные результаты подтверждают, что модифицированная архитектура предоставляет надежное решение для оперативных систем мониторинга нефтяных разливов, которые должны функционировать надежно в различных природных условиях и конфигурациях датчиков. Сохранение информации о текстуре, специфичной для каналов, в сочетании с многошкальным контекстным анализом создает синергетический эффект, который значительно улучшает устойчивость к шуму по сравнению с существующими методологиями.

Обсуждение. Подход *LBP* по каналам представляет собой концептуально обоснованное расширение анализа текстуры для приложений дистанционного зондирования, с теоретическими преимуществами для сохранения спектрально-текстурной информации, критически важной для различения нефтяных разливов. Проверка на правильно размеченных наборах данных с соответствующим представлением классов и сбалансированным разделением запланирована авторами как будущая работа, состоящая в расширении набора данных для дальнейшей проверки обобщающих способностей по различным модальностям датчиков. Запланированные исследования посвящены устранению методологических ограничений с помощью интеграции мультисенсорной фузии данных и методов объяснимого ИИ для повышения оперативной надежности в приложениях экологического мониторинга.

Заключение. Исследование предлагает интеграцию *LBP* по каналам с архитектурой *PSPNet* для улучшенного обнаружения и классификации нефтяных разливов на спутниковых изображениях. Методологическая инновация заключается в сохранении информации о текстуре, специфичной для каналов, путем независимой обработки каждого *RGB*-канала через оператор *LBP*. Таким образом сохраняются спектрально-текстурные сигнатуры, которые обычно теряются во время традиционного преобразования в оттенки серого.

Экспериментальные результаты показывают mIoU 86,05 % на тестовом наборе данных, что представляет собой значительное улучшение как по точности, так и по устойчивости к шуму по сравнению с базовой реализацией *LBP+PSPNet*. Предложенная архитектура демонстрирует повышенную устойчивость к шумовым условиям, с деградацией *F1*-меры всего на 3,1 % при увеличении уровня шума (от 5 % до 20 %) по сравнению с 9,8 % деградацией в традиционных подходах. Эта устойчивость к шуму обусловлена тремя архитектурными характеристиками: сохранением текстурных сигнатур, зависящих от длины волны, по спектральным каналам, многошкальным контекстным анализом через модуль пирамидального пулинга и стратегическим увеличением шума во время обучения.

Список литературы / References

1. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Сидорякина В.В., Кузнецова И.Ю., Атаян А.М. Использование параллельных вычислений для оценки процесса переноса загрязняющих веществ в мелководных водоемах. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Математика. Механика. Информатика*. 2024;24(2):298–315. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-298-315>
2. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Sidoryakina V.V., Kuznetsova I.Yu., Atayan A.M. Using parallel computing to evaluate the transport of pollutants in shallow waters. *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.* 2024;24(2):298–315. (In Russ.) <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-298-315>
3. Сидорякина В.В. Математическая модель процесса распространения нефтяных загрязнений в прибрежных морских системах. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(4):39–46. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-39-46>
4. Sidoryakina V.V. Mathematical model of the process of oil pollution spreading in coastal marine systems. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(4):39–46. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-39-46>
5. Sidoryakina, V., Filina A. A set of tools for predictive modeling of the spatial distribution of oil pollution. *E3S Web of Conferences*. 2024;592,04017. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202459204017>
6. Sukhinov A., Sidoryakina V., Solomakha D. Identification of plankton populations in the surface waters of the Azov Sea based on neural network structures of various architectures. *BIO Web of Conferences*. 2024;141,03003. <https://doi.org/10.1051/bioconf/202414103003>
7. Сухинов А.И., Сидорякина В.В., Соломаха Д.А. Идентификация планктонных популяций на поверхности морских систем на основе методов машинного обучения. В: *Материалы международной научно-практической конференции «Приоритетные направления развития науки и образования в условиях формирования технологического суверенитета»*. Ростов-на-Дону: ДГТУ-Принт; 2024. С. 272–277.
8. Sukhinov A.I., Sidoryakina V.V., Solomakha D.A. Identification of plankton populations on the surface of marine systems based on machine learning methods. *Priority areas for the development of science and education in the context of the formation of technological sovereignty: materials of the International scientific and practical conference*. Rostov-on-Don: DSTU-Print; 2024. P. 272–277. (In Russ.)

6. Панасенко Н.Д. Прогноз состояния прибрежных систем с помощью математического моделирования на основе космических снимков. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(4):54–65. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-54-65>

Panasenko N.D. Forecasting the coastal systems state using mathematical modelling based on satellite images. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(4):32–44. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-54-65>

7. Struch R.E., Pulster E.L., Schreier A.D., Murawski S.A. Hepatobiliary analyses suggest chronic pah exposure in hakes (urophycis spp.) following the deepwater horizon oil spill. *Environmental Toxicology and Chemistry*. 2019;38(12):2740–2749. <https://doi.org/10.1002/etc.4596>

8. Snyder S.M., Olin J.A., Pulster E.L., Murawski S.A. Spatial contrasts in hepatic and biliary PAHs in Tilefish (*Lopholatilus chamaeleonticeps*) throughout the Gulf of Mexico, with comparison to the Northwest Atlantic. *Environmental Pollution*. 2020;258,113775. <https://doi.org/10.1016/j.envpol.2019.113775>

9. Pisano A., Bignami F., Santoleri R. Oil spill detection in glint-contaminated near-infrared modis imagery. *Remote Sensing*. 2015;7;1112–1134. <https://doi.org/10.3390/rs70101112>

10. Brekke C., Solberg A.H. Oil spill detection by satellite remote sensing. *Remote Sensing of Environment*. 2005;95(1):1–13. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.rse.2004.11.015>

11. Сухинов А.И., Соломаха Д.А. Усовершенствованный метод распознавания объектов морских и прибрежных систем на основе комбинации метода локальных бинарных шаблонов и нейросетевых технологий. *Вычислительные методы и программирование*. 2025;26(3):366–379. <https://doi.org/10.26089/NumMet.v26r324>

Sukhinov A.I., Solomakha D.A. Improved method of recognizing marine and coastal system objects based on combination of local binary pattern method and neural network technologies. *Num. Meth. Prog.* 2025;26(3):366–379. (In Russ.) <https://doi.org/10.26089/NumMet.v26r324>

12. Сидорякина В.В., Соломаха Д.А. Идентификация морских разливов нефти на основе нейросетевых технологий. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(4):43–48. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-43-48>

Sidoryakina V.V., Solomakha D.A. Identification of Marine Oil Spills Using Neural Network Technologies. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(4):43–48. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-43-48>

13. Ojala T., Pietikäinen M., Mäenpää T. Multiresolution gray-scale and rotation invariant texture classification with local binary patterns. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* 2002;24:112278. <https://doi.org/10.1109/TPAMI.2002.1017623>

14. Сухинов А.А., Остроброд Г.Б. Эффективная детекция лиц на многоядерном процессоре Epiphany. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2017;1(1):113–127. URL: <https://www.cmit-journal.ru/jour/article/view/85/115> (дата обращения: 21.12.2025).

Sukhinov A.A., Ostrobrod G.B. Efficient face detection on epiphany multicore processor Epiphany. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2017;1(1):113–127. (In Russ.) URL: <https://www.cmit-journal.ru/jour/article/view/85/115> (accessed: 21.12.2025).

15. Heikkila M., Pietikäinen M. A texture-based method for modeling the background and detecting moving objects. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* 2006;28:657–662. <https://doi.org/10.1109/TPAMI.2006.68>

16. Ahmed S., ElGharbawi T., Salah M., El-Mewafi M. Deep neural network for oil spill detection using sentinel-1 data: application to egyptian coastal regions. *Geomatics, Natural Hazards and Risk*. 2023;14:76–94. <https://doi.org/10.1080/19475705.2022.2155998>

17. Lee J.-S. Digital image enhancement and noise filtering by use of local statistics. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* 1980;2:165–168. <https://doi.org/10.1109/TPAMI.1980.4766994>

18. Yu F., Sun W., Li J., Zhao Y., Zhang Y., Chen G. An improved otsu method for oil spill detection from SAR images. *Oceanologia*. 2017;59(3):311–317. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.oceano.2017.03.005>

Об авторах:

Александр Иванович Сухинов, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, директор НИИ Математического моделирования и прогнозирования сложных систем Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [ORCID](#), [SPIN-код](#), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [MathSciNet](#), sukhinov@gmail.com

Денис Анатольевич Соломаха, магистрант 2 курса кафедры математики и информатики Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [ORCID](#), [SPIN-код](#), [solomakha.05@yandex.ru](#)

Валентина Владимировна Сидорякина, доктор физико-математических наук, доцент кафедры математики и информатики Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [ORCID](#), [SPIN-код](#), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [MathSciNet](#), cvv9@mail.ru

Заявленный вклад авторов:

А.И. Сухинов: общее научное руководство; постановка задачи; формулировка идей исследования, целей и задач, разработка методологии.

Д.А. Соломаха: проведение экспериментов, формулировка достигнутых результатов и описание их значимости.

В.В. Сидорякина: курирование данных; деятельность по аннотированию.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Alexander I. Sukhinov, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Director of the Research Institute of Mathematical Modeling and Forecasting of Complex Systems, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [MathSciNet](#), sukhinov@gmail.com

Denis Anatolyevich Solomakha, 2nd year master's student, Department of Mathematics and Computer Science, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), solomakha.05@yandex.ru

Valentina Vladimirovna Sidoryakina, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematics and Informatics, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [MathSciNet](#), cvv9@mail.ru

Contributions of the authors:

A.I. Sukhinov: overall scientific supervision; problem statement; formulation of research ideas, goals, and objectives; development of methodology.

D.A. Solomakha: conducting experiments; formulation of achieved results and description of their significance.

V.V. Sidoryakina: data curation; annotation activities.

Conflict of Interest Statement: the authors declare no conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 15.01.2026

Поступила после рецензирования / Reviewed 19.02.2026

Принята к публикации / Accepted 11.03.2026

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

INFORMATION TECHNOLOGIES



УДК 519.6

Оригинальное теоретическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2026-10-1-72-83>


Геометро-комбинаторный подход к конструированию фракталов с кубической симметрией

 Е.В. Кравченко¹ , А.М. Пупасов-Максимов²  , М.А. Мерзликин¹ 
¹ Независимый исследователь² Федеральный университет Жуис-ди-Фора, г. Жуис-ди-Фора, Бразилия✉ pupasov.maksimov@ufjf.br

Аннотация

Введение. Предложен итеративный геометро-комбинаторный подход к конструированию фракталов с кубической симметрией — кубофракталов, адаптированный для их последующей реализации. Установлена связь введенных кубофракталов с аттракторами нестационарных систем итерированных функций. Изучены два примера кубофракталов, определены аттракторы соответствующих систем итерированных функций и вычислены размерности Хаусдорфа. В прикладной физике и материаловедении фрактальные модели могут успешно использоваться для описания иерархической структуры новых материалов. При этом идеальное самоподобие на всех масштабах не может наблюдаться в реальных системах. Когда речь идет о синтезе фракталоподобных структур, зачастую можно выделить минимальный масштаб и базовые элементы структуры, которые комбинируются на более высоких иерархических уровнях. В данной работе авторы используют именно этот подход для построения кубофракталов.

Материалы и методы. Предложенный подход близок к построению фракталов с помощью L -систем, однако даже простые правила компоновки кубов, которые рассматривали авторы, требуют контексто-зависимых правил. В работе установлена связь между рассматриваемыми алгоритмами генерации и нестационарным обобщением систем итерированных функций. Таким образом, исследование предельных переходов от предфракталов к фракталам проводится в рамках теории сжимающих отображений. Соответствующие нестационарные системы итерированных функций реализованы в *Wolfram Mathematica* (в приложении приводится код для генерации и визуализации кубофракталов).

Результаты исследования. Показана адекватность и простота алгоритма генерации кубофракталов с точки зрения создания соответствующих структур. Установлена связь с математическим аппаратом нестационарных систем итерированных функций. Изучены варианты правил генерации кубофракталов и выделены различные классы получающихся структур. Исследованы поточечные пределы итераций кубофракталов и предельный переход по метрике Хаусдорфа. Показано, что, выбирая последовательность a_{n+1} с заданной скоростью роста и ее разбиение на Ra_n и Δ_n , можно управлять мерой итераций и хаусдорфовой размерностью предела. Для двух базовых примеров кубофракталов с последовательностями $a_n = n \cdot 2^{n-1} + 2$, $n > 0$ (кубосикстер) и $a_n = 1 + 8 \cdot 5^{n-2}$, $n > 1$ вычислены фрактальные размерности, равные 1 и $\frac{\ln 3}{\ln 5}$ соответственно. Рассмотрены обратные траектории нестационарных систем итерированных функций и предложен подход к изучению их аттракторов.

Обсуждение. Кубофракталы могут стать удобным подходом к генерации фрактальных структур для приложений и, кроме того, они существенно обогащают теорию нестационарных систем итерированных функций нетривиальными примерами.

Заключение. Предельное множество кубосикстера есть просто отрезок $[0;1]$, в то время как мера конечных итераций, которые приближаются к отрезку в смысле метрики Хаусдорфа, стремится к нулю. Можно предположить, что и другие физические свойства итераций (масса, прочность, пористость и т. д.) будут различаться в поточечном пределе и в пределе в смысле метрики Хаусдорфа. В связи с этим именно предфракталы для кубосикстера представляют исследовательский интерес в приложениях.

Ключевые слова: фракталы, системы итерированных функций, компьютерное моделирование фракталов, нестационарная теория неподвижной точки, поликубы

Благодарности. Авторы благодарят свои семьи и друзей за оказанную поддержку. А.М. Пупасов-Максимов благодарен кафедре математики федерального университета г. Жуис-ди-Фора и лаборатории математической физики Томского государственного университета за предоставленную возможность научного визита, в ходе которого было выполнено исследование кубофракталов.

Для цитирования. Кравченко Е.В., Пупасов-Максимов А.М., Мерзликин М.А. Геометро-комбинаторный подход к конструированию фракталов с кубической симметрией. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2026;10(1):72–83. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2026-10-1-72-83>

Original Theoretical Research

A Geometric-Combinatorial Approach to the Constructing Fractals with Cubic Symmetry

Evgenii V. Kravchenko¹ , Andrey M. Pupasov-Maksimov²  , Matvei A. Merzlikin¹ 

¹ Independent researcher

² Federal University of Juiz de Fora, Juiz de Fora, Brazil

 pupasov.maksimov@ufjf.br

Abstract

Introduction. An iterative geometric-combinatorial approach to the construction of fractals with cubic symmetry — cubofractals — is proposed, adapted for their subsequent physical implementation. A connection between the introduced cubofractals and attractors of non-stationary iterated function systems is established. Two examples of cubofractals are studied, the attractors of the corresponding iterated function systems are determined, and their Hausdorff dimensions are computed. In applied physics and materials science, fractal models can be successfully used to describe the hierarchical structure of new materials. However, perfect self-similarity at all scales is not observed in real systems. When synthesizing fractal-like structures, a minimum scale and basic structural elements that combine at higher hierarchical levels can often be identified. In this work, the authors employ this very approach to construct cubofractals.

Materials and Methods. The proposed approach is close to constructing fractals using L -systems; however, even the simple cube arrangement rules considered by the authors require context-sensitive rules. This work establishes a connection between the considered generation algorithms and a non-stationary generalization of iterated function systems. Thus, the study of the limit transitions from prefractals to fractals is conducted within the framework of the theory of contractive mappings. The corresponding non-stationary iterated function systems are implemented in *Wolfram Mathematica* (the appendix provides code for the generation and visualization of cubofractals).

Results. The adequacy and simplicity of the cubofractal generation algorithm for creating corresponding structures are demonstrated. A connection with the mathematical apparatus of non-stationary iterated function systems is established. Variants of cubofractal generation rules are studied, and different classes of the resulting structures are identified. Pointwise limits of cubofractal iterations and the limit transition in the Hausdorff metric are investigated. It is shown that by choosing a sequence a_{n+1} with a given growth rate and its partitioning into Ra_n and Δ_n , we can control the iteration measure and the Hausdorff dimension of the limit. For two basic examples of cubo-fractals with sequences $a_n = n \cdot 2^{n-1} + 2, n > 0$ (cubosixer) and $a_n = 1 + 8 \cdot 5^{n-2}, n > 1$ we calculated the fractal dimensions 1 and $\frac{\ln 3}{\ln 5}$, respectively.

Backward trajectories of non-stationary systems of iterated functions are considered, and an approach to studying their attractors is proposed.

Discussion. Cubofractals can provide a convenient approach for generating fractal structures for applications and, furthermore, they significantly enrich the theory of non-stationary iterated function systems with non-trivial examples.

Conclusion. The limit set of the cubosister is simply the segment $[0;1]$, while the measure of the finite iterations, which approach the segment in the sense of the Hausdorff metric, tends to zero. It can be assumed that other physical properties of the iterations (mass, strength, porosity, etc.) will also differ in the pointwise limit and in the limit in the sense of the Hausdorff metric. In this regard, it is the prefractals for the cubosister that are of research interest in applications.

Keywords: fractals, iterated function systems, computer simulation of fractals, non-stationary fixed point theory, polycubes

Acknowledgements. The authors thank their families and friends for their support. A.M. Pupasov-Maksimov is grateful to the Department of Mathematics at the Federal University of Juiz de Fora and the Laboratory of Mathematical Physics at Tomsk State University for the opportunity for a research visit during which the study of cubofractals was carried out.

For Citation. Kravchenko E.V., Pupasov-Maksimov A.M., Merzlikin M.A. A Geometric-Combinatorial Approach to the Construction of Fractals with Cubic Symmetry. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2026;10(1):72–83. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2026-10-1-72-83>

Введение. Исследование классических фрактальных множеств (таких как множества Кантора, Жюлиа, кривые Коха и т. д.) и формальных методов их построения остается активной и развивающейся областью чистой и прикладной математики. Акцент сместился с визуализации на глубокие теоретические связи и новые применения.

Основные направления современных исследований можно разделить на две категории: углубление теории и формальных методов; установление междисциплинарных связей [1].

Первоначально, Мандельброт определил фрактал как множество, для которого размерность Хаусдорфа-Безиковича строго превышает топологическую размерность [2]. Однако такое определение оказалось слишком ограничительным. Более общее определение фракталов включает в себя негладкие или фрагментированные геометрические формы, которые можно разделить на части, являющиеся (по крайней мере приблизительно) уменьшенной копией целого. Как правило, фрактальные множества конструируются с помощью итеративных процедур и сам фрактал возникает в пределе бесконечного числа итераций. Промежуточные фигуры принято называть предфракталами [3].

В прикладной физике и материаловедении фрактальные модели могут успешно использоваться для описания иерархической структуры новых материалов. Анализ фрактальной поверхности нано- и пористых материалов [4] применяется для предсказания каталитической активности, ёмкости адсорбции и механических свойств (аэрогели, металлоорганические каркасы). В фотонике и нелинейной оптике паттерны фрактальной геометрии применяются для создания структур с необычными спектральными свойствами [5]. При этом следует отметить, что идеальное самоподобие на всех масштабах не может наблюдаться в реальных (природных) системах, то есть в приложениях реально рассматриваются предфракталы.

Если речь идет о синтезе фракталоподобных структур, зачастую можно выделить минимальный масштаб и базовые элементы структуры, которые комбинируются на более высоких иерархических уровнях. В данной работе авторы используют именно этот подход для построения кубофракталов. Общие алгоритмы построения кубофракталов и конкретный пример (кубосикстер), проясняющий процедуру построения, представлены ниже. Базовым элементом структуры является куб, а построение фрактала задается алгоритмическими правилами объединения базовых элементов при переходе на следующий иерархический уровень. Такой подход близок к построению фракталов с помощью L -систем [6] (математический аппарат для описания процессов роста и развития организмов, основанный на механизме перезаписи строк), однако даже простые правила компоновки кубов, которые рассматривали авторы, требуют контексто-зависимых правил.

Математически наиболее полный подход к генерации кубофракталов заключается в обобщении систем итерированных функций [7] после редукции задачи к одномерной. Восстановление наиболее интересной для нас трехмерной ситуации выполняется по симметричным соображениям. Поскольку для кубофракталов изменение масштаба при переходе с уровня на уровень не обязано быть постоянным, на каждом шаге требуется своя система итерированных функций (СИФ или IFS). Ниже представлены основные понятия и результаты теории нестационарных систем итерированных функций, которые далее будут использованы для исследования предложенных кубофракталов. Авторами сформулированы правила перехода от алгоритмического построения к последовательности систем итерированных функций. В свою очередь, по заданной последовательности возможно определить множество, являющееся аттрактором этой последовательности (причем, как в прямом, так и в обратном порядке), и вычислить его основные свойства (размерность, меру).

Материалы и методы

Конструирование кубофракталов. Рассмотрим симметричные (самоподобные) геометрические фигуры (последовательности фигур) с иерархической структурой, итеративно образуемые на основе копирования пространственного куба. Новая получаемая фигура состоит из набора равных кубов, соединяемых грань к грани, и сохраняет симметрии куба. Каждая фигура в последовательности является поликубом с максимальной симметрией [8]. Поскольку мы рассматриваем иерархические последовательности поликубов с максимальной симметрией и изучаем предельные переходы, будем называть такие поликубы кубофракталами.

На рис. 1 изображена процедура итеративной сборки кубофрактала. Восемь (в общем случае R_n^3) малых кубов содержат копии текущей n итерации кубофрактала. Они расположены в узлах кубической решетки для сохранения полной симметрии. Малые кубы отстоят на дополнительное расстояние и соединяются перемычками, таким образом образуя $(n + 1)$ итерацию кубофрактала, содержащуюся в объемлющем кубе (куб с синими ребрами).

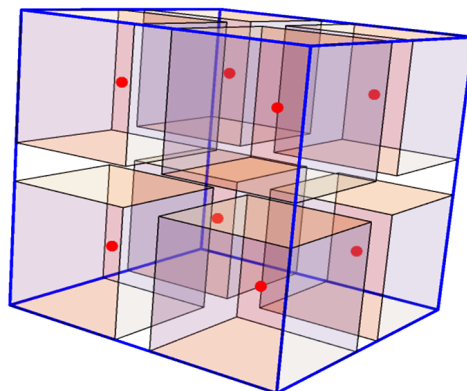


Рис. 1. Итеративная сборка кубофрактала с сохранением симметрии

Пусть a_n есть длина ребра малого куба на рис. 1, а a_{n+1} — длина большого куба. Тогда процесс построения кубофракталов кодируется двухчленным линейным неоднородным рекуррентным соотношением для размера объемлющего куба:

$$a_{n+1} = R_n \cdot a_n + \Delta_n, \quad (1)$$

где $R_n \in N$ — это число повторений фигуры уровня n вдоль ребра объемлющего куба уровня $n + 1$, $\Delta_n \in N$ — это суммарная длина соединительных промежутков (длина ребра базового куба на первой итерации равна 1). Целочисленность Δ_n связана с построением кубофрактала из копий базового куба. Поскольку число копий равно R_n , то необходимо заполнить $R_n - 1$ промежуток между копиями. Для простоты будем рассматривать одинаковые промежутки, так что $\Delta_n = \delta_n (R_n - 1)$. Если длина соединительных промежутков варьируется, то полная длина соединительных промежутков Δ_n задается разбиением

$$\Delta_n = \sum_{j=1}^{R_n-1} \delta_{n,j}. \quad (2)$$

Случай отрицательных Δ_n , связанный с наложением копий, в данной работе не рассматривается. Помимо рекуррентного соотношения (1), необходимо задать начальный поликуб. В качестве стартовой фигуры можно взять любой поликуб с максимальной симметрией. Простейший элемент — куб. Следующий возможный элемент — пространственный крест (композиция из 7 кубов, изображенная на рис. 2). Внешние кубы пространственных крестов, находящихся на границе итерации n , определяют положения для дополнительных перемычек.



Рис. 2. Пространственный крест — базовый элемент построения кубофракталов

Кубосикстер как оригинальный кубофрактал. Рассмотрим алгоритм построения иерархической структуры на примере кубосикстера, изображенного на рис. 2, начиная с куба с единичным ребром:

1. Шести сторонам исходного куба добавляются внешние одинаковые кубы, получается пространственный крест, состоящий из семи кубов.

2. Восемь копий пространственного креста соединяются так, что их центры по четырем сторонам сами образуют куб. Полученная фигура может быть вписана в куб с размером полученного ребра, равным шести.

3. Третья и последующие итерации: 8 копий полученной фигуры соединяются так, что центры фигур образуют куб. Фигуры соединяются по внешним сторонам пространственных крестов с помощью цепочек (перемычек, соединительных отрезков) единичных кубов. Расстояние между копиями фигур в два раза превышает такое расстояние для предыдущей итерации. Размер ребра объемлющего куба, в который может быть вписана фигура, задается формулой (1).

Начиная с третьей итерации фигуры приобретают выраженные черты фрактальных объектов, демонстрируют свойства самоподобия, то есть целое повторяет структуру его фрагментов, образуя сложные пространственные структуры с возрастающей пористостью и высокой степенью пространственной симметрии.

На шаге n получаемая фигура содержится в кубе со стороной a_n , переход на следующий уровень задается рекуррентным соотношением

$$a_{n+1} = 2a_n + 2^n - 2. \quad (3)$$

В дальнейшем будем называть кубофрактал, задаваемый выражением (3), кубосикстером. Авторы предложили отдельное название для кубосикстера, с построения которого началось исследование кубофракталов, поскольку, как будет показано ниже, предельное множество для последовательности (3) обладает уникальными свойствами. Кроме того, это рекуррентное соотношение можно решить в явном виде

$$a_n = n \cdot 2^{n-1} + 2 \quad (4)$$

и оно допускает простую комбинаторную интерпретацию.

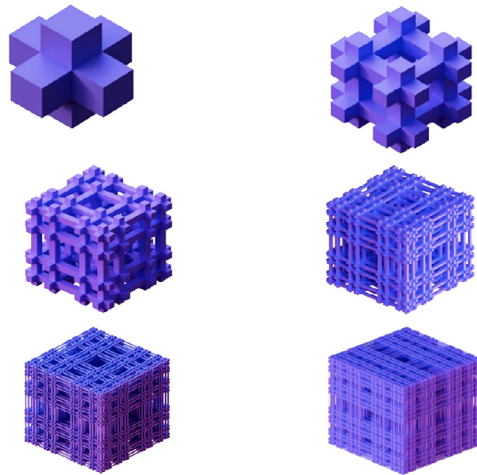


Рис. 3. Пример алгоритма построения кубофрактала

Редукция к одномерной задаче. Поскольку каждая итерация кубофрактала обладает симметрией куба, можно свести задачу построения кубофрактала к одномерной. Тогда алгоритмические вычисления геометрических форм на каждой итерации сведутся к линейным преобразованиям последовательностей рациональных чисел (границ интервалов), что может быть эффективно реализовано в моделировании. Кроме того, редукция к одномерной задаче позволит исследовать процедуру предельного перехода. Выполним сначала такую редукцию для кубосикстера.

Определение 1. Пусть множество $K_1 = [1;2]$. Рассмотрим следующее рекуррентное соотношение:

$$K_{n+1} = K_n \cup K'_n, \tag{5}$$

где K'_n — множество K_n , симметрично отраженное относительно прямой $x = \frac{a_{n+1}}{2}$. Будем называть K_n n -той итерацией ненормированного множества кубосикстера. Диаметр множества K_n неограниченно растет с номером итерации:

$$d(K_n) = a_n - 2 = n \cdot 2^{n-1}.$$

Последовательность диаметров $d(K_n)$ совпадает с числовой последовательностью, подсчитывающей число вариантов выбора из множества с n элементами подмножества, а внутри этого подмножества выделенный элемент.

Определение 2. Ковром n -ой итерации кубосикстера назовем

$$K_n^{(2)} = ([0;1] \times K_n) \cup (K_n \times [0;1]). \tag{6}$$

Определение 3. Назовем n -той итерацией кубосикстера величину

$$K_n^{(3)} = ([0;1] \times K_n \times K_n) \cup (K_n \times [0;1] \times K_n) \cup (K_n \times K_n \times [0;1]). \tag{7}$$

Определение 4. Назовем N -мерной n -ой итерацией кубосикстера величину

$$K_n^{(N)} = \bigcup_{i=0}^{N-1} K_n^{\times i} \times [0;1] \times K_n^{\times (N-1-i)}. \tag{8}$$

Отметим, что определенная таким образом n -ая итерация кубосикстера $K_n^{(3)}$ совпадает с фигурой, построенной в предыдущем разделе.

Редукция к одномерному множеству упрощает изучение свойств кубосикстера (и вообще кубофракталов). Перейдем к нормированным множествам

$$K_n = a_n^{-1} K_n \tag{9}$$

так, что $K_n \subset [0;1]$. На рис. 3 изображены нормированные итерации K_2, \dots, K_5 , внешне похожие на итерации множества Кантора. Стоит, однако, отметить существенную разницу: множество Кантора будет счетным пересечением всех итераций, что гарантирует его замкнутость, в то же время итерации K_n имеют пустое пересечение $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$ (достаточно рассмотреть $\bigcap_{n=1}^4 K_n = \emptyset$). В результате, предельный переход $n \rightarrow \infty$ требует осторожности.

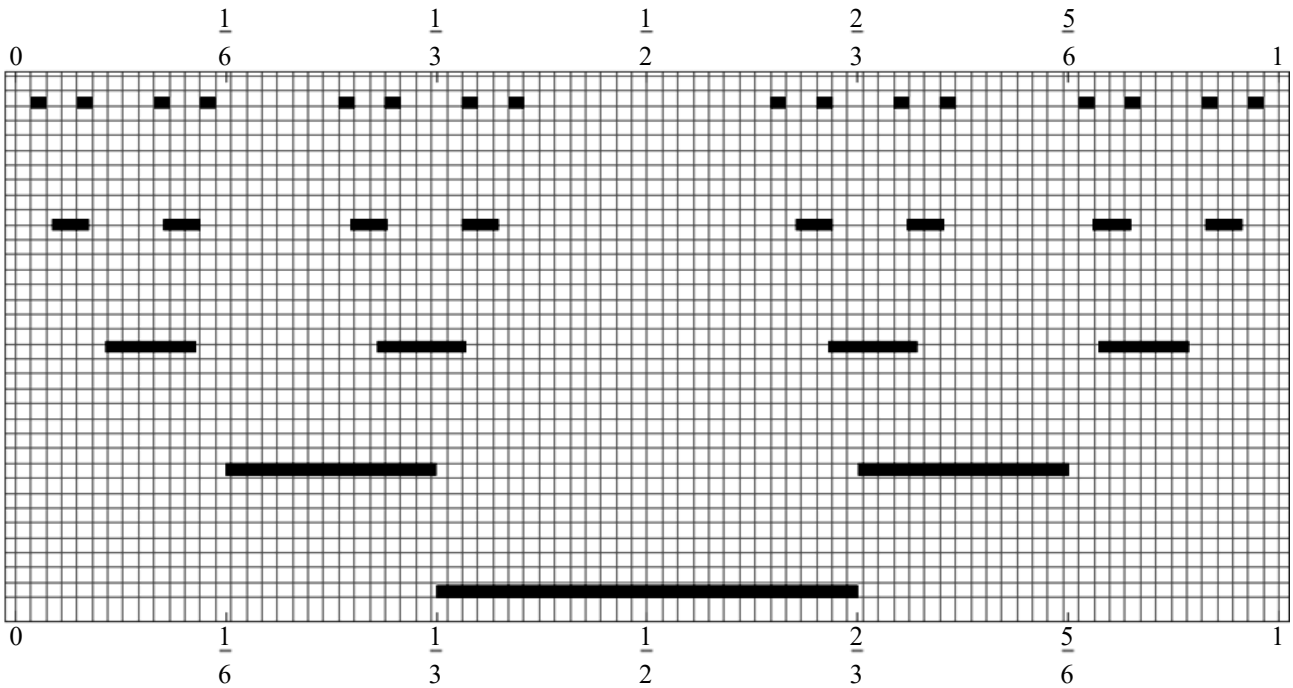


Рис. 4. Первые пять итераций множества кубосикстера

Утверждение 1. Суммарная длина отрезков в K_n (то есть его мера Лебега) равна

$$\lambda(K_n) = \frac{2^{n-1}}{a_n} = \frac{2^{n-1}}{n \cdot 2^{n-1} + 2}. \quad (10)$$

В пределе $n \rightarrow \infty$ мера Лебега K_n стремится к нулю.

Теорема 1. Объем N -мерной ($N > 1$) n -ой итерации кубосикстера равен

$$\lambda(K_n^{(N)}) = N \left(\frac{2^{n-1}}{a_n} \right)^{N-1} - (N-1) \left(\frac{2^{n-1}}{a_n} \right)^N. \quad (11)$$

Доказательство. Согласно определению 4, N -мерная итерация строится как объединение N множеств. Объем каждого из этих множеств равен

$$\lambda(K_n^{x_i} \times [0;1] \times K_n^{x(N-1-i)}) = \lambda(K_n^{(N-1)}) = \left(\frac{2^{n-1}}{a_n} \right)^{N-1}.$$

Тогда, чтобы найти объем $\lambda(K_n^{(N)})$, нужно из суммы объемов составляющих множеств вычесть объемы пересечений с учетом их кратности:

$$\lambda \left(\bigcup_{i=0}^{N-1} K_n^{x_i} \times [0;1] \times K_n^{x(N-1-i)} \right) = N \lambda(K_n^{(N-1)}) - (N-1) \lambda(K_n^{(N)}). \quad (12)$$

На рис. 5 приведен график меры (12) для различных итераций и размерностей кубосикстера, а в таблице 1 указаны числовые значения меры.

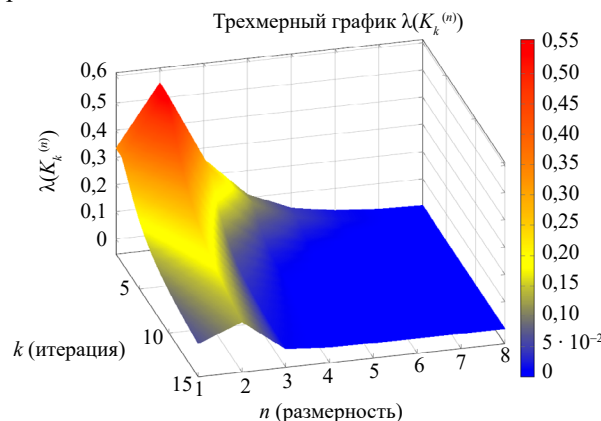


Рис. 5. Мера в зависимости от номера итерации и размерности кубосикстера

Мера n -мерной k -ой итерации кубосикстера

$n \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7
1	0,3333	0,3333	0,2857	0,2353	0,1951	0,1649	0,1422
2	0,5556	0,5556	0,4898	0,4152	0,3522	0,3027	0,2642
3	0,2593	0,2593	0,1983	0,1400	0,0994	0,0727	0,0549
4	0,1111	0,1111	0,0733	0,0429	0,0254	0,0157	0,0103
5	0,0453	0,0453	0,0257	0,0124	0,0061	0,0032	0,0018
6	0,0178	0,0178	0,0087	0,0035	0,0014	0,0006	0,0003
7	0,0069	0,0069	0,0029	0,0009	0,0003	0,0001	0,0001

В общем случае редукция кубофрактала к одномерному множеству осуществляется аналогично. При этом центральные кубы пространственных крестов кодируются отрезками одномерного множества, а перемычки получаются в результате последовательных декартовых произведений.

Пусть множество K_1 — это набор отрезков, соответствующий центральным кубам пространственных крестов кубофрактала первого уровня (без потери общности можно взять $K_1 = [1;2]$ — одномерную редукцию пространственного креста). Тогда рекуррентное соотношение (5), определяющее множество кубофрактала, примет вид:

$$K_{n+1} = \bigcup_{j=1}^{R_n} T_j(K_n), \tag{13}$$

где T_j — изометрии (композиции трансляции и отражения), которые создают копии множеств предыдущего уровня. Далее будем рассматривать только трансляции

$$T_1 = id, T_j(x) = x + (j-1) \cdot a_n + \sum_{m=1}^{j-1} \delta_{n,m}. \tag{14}$$

Например, для множества кубосикстера трансляция

$$T_2(x) = x + (a_n + \Delta_n) = x + 2^{n-1}(n+2) \tag{15}$$

дает эквивалентный отражению относительно точки $a_{n+1}/2$ результат.

Суммарная длина отрезков в нормированном множестве кубофрактала K_n равна числу отрезков, деленному на a_n , $\lambda(K_n) = (a_n)^{-1} a_1 \cdot \lambda(K_1) \prod_{j=1}^{n-1} R_j$, а объем N -мерной n -ой итерации $R\Delta$ -кубофрактала вычисляется по формуле (12). Поскольку

$$a_n = a_1 \prod_{j=1}^{n-1} R_j + \sum_{j=1}^{n-1} \Delta_{n-j} \left(\prod_{m=1}^{j-1} R_{n-m} \right), \tag{16}$$

имеется значительная гибкость в выборе последовательностей, предельные значения и скорость сходимости которых $\lambda(K_n)$ можно контролировать. В случае стационарных последовательностей $R_j = R, \Delta_n = \Delta$

$$a_n = a_1 \cdot R^{n-1} + \Delta \sum_{j=1}^{n-1} R^{j-1} = a_1 \cdot R^{n-1} + \Delta \cdot \frac{1 - R^{n-1}}{1 - R}.$$

Также при $n \rightarrow \infty$ предел меры множеств K_n остается конечным

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(K_n) = \frac{a_1(R-1)}{\Delta + a_1(R-1)} \lambda(K_1) < 1. \tag{17}$$

В случае переменной длины соединительных фрагментов Δ_n

$$a_n = a_1 \cdot R^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} \Delta_{n-j} \cdot R^{j-1}$$

можно провести оценку предельного поведения меры, рассмотрев экспоненциально возрастающие длины интервалов $\Delta_n = \Delta_1^n$. Такой рост приведет к нулевому пределу $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(K_n) = 0$ в случае, когда $\Delta_1 \geq R$, иначе вновь получим ненулевой предел. Заметим, что для кубосикстера $\Delta_n = 2^n - 2$ асимптотически стремится к $R_n = 2^n$, следовательно, именно быстрый рост Δ_n отвечает за нулевой предел (10) для последовательности мер кубосикстера.

Таким образом, классифицировать кубофракталы можно по различным вариантам зависимостей для R_n, Δ_n и по монотонно растущим последовательностям a_n . Постоянные $R_n = const, \Delta_n = const$ генерируют регулярные, всюду плотные кубические решетки. В базовых примерах $R_n = const, \Delta_n$ растет экспоненциально. В таком случае длина (объем) итераций стремится к нулю, предельное множество будет самоподобно.

Другой класс кубофракталов возникнет, если R_n изменяется, например, периодически или квази-периодично (в этом случае задача изучения свойств предельного множества, даже его существования, весьма нетривиальна). Если R_n изменяется, но имеет фиксированный предел, то мы возвращаемся к базовой ситуации. Если на каждом шаге R_n и Δ_n выбираются случайно из какого-то набора вариантов, приходим к стохастическими кубофракталам. Такая классификация не является исчерпывающей и дальнейшее исследование кубофракталов представляет значительный интерес. Например, на каждом шаге можно выбирать поликуб с кубической симметрией, который будет использоваться как шаблон для заполнения копиями (например, чередовать куб и пространственный крест).

Генерация кубофракталов с помощью последовательностей систем итерированных функций. Концепция систем итерированных функций (СИФ или IFS) была введена Хатчинсоном [7] для описания самоподобных множеств, таких как фракталы. Впоследствии было установлено, что СИФ предоставляют потенциально новый метод исследования формы и текстуры изображений [9]. Ввиду его важности для понимания изображений, в литературе обсуждаются несколько расширений классической СИФ, таких как рекуррентная СИФ, разделенная СИФ и супер-СИФ. Фрактальные функции, графики которых являются аттракторами подходящим образом выбранной СИФ, предоставляют новый метод интерполяции и аппроксимации.

Определение 5. СИФ состоит из метрического пространства (X, d) и конечного семейства непрерывных отображений

$$f_i : X \rightarrow X, i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Обозначим такую СИФ как $F = \{X; f_i : i = 1, 2, \dots, n\}$. С помощью СИФ F можно построить отображение на пространстве $H(X)$ компактных подмножеств множества X , называемое оператором Барнсли-Хатчинсона. Для упрощения обозначений используем один и тот же символ F для системы итерированных функций, множества функций f_i и для оператора Барнсли-Хатчинсона:

$$F : H(X) \rightarrow H(X),$$

$$F(B) := \bigcup_{f \in F} f(B), B \in H(X),$$

где $f(B) := \{f(b) : b \in B\}$. Константа Липшица функции F равна [10]:

$$L_F = \max_{i=1, 2, \dots, n} Lip(f_i).$$

Если f_i — сжимающие отображения, то СИФ является сжимающей в пространстве $H(X)$ с метрикой Хаусдорфа. Следовательно, по принципу сжатия Банаха, имеет место

Теорема 2. Пусть (X, d) — полное метрическое пространство, и $F = \{X; f_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ — система итерированных функций с константой Липшица L_f . Тогда существует единственное множество A_f такое, что $F = F(A_f)$. Кроме того, для каждого $B_0 \in H(X)$ последовательность $B_{k+1} = F(B_k)$ сходится к A_f в $H(X)$.

Пример. Для системы итерированных функций $F = \{[0; 1]; f_1(x) = x/3, f_2(x) = 1 - x/3\}$ константа Липшица равна $1/3$, а аттрактор A_f — это множество Кантора.

Заметим, что каждый шаг n построения кубосикстера можно описать двумя функциями: $f_1(x) = a_n \cdot x/a_{n+1}$, $f_2(x) = 1 - f_1(x)$. Эти функции зависят от номера шага, следовательно приходим к последовательности систем итерированных функций и нестационарной версии теории сжимающих отображений [10].

Обобщая классический случай СИФ, рассмотрим последовательность систем функций (ПСФ) и ее траектории. Рассмотрим ПСФ $\{F_i\}, i \in N$, определенную как

$$F_i = \{X; f_{i,r}, r = 1, 2, \dots, n_i\},$$

где $f_{i,r} : X \rightarrow X$ — непрерывные отображения.

Соответствующие многозначные отображения зададим по следующему правилу:

$$F_i : H(X) \rightarrow H(X),$$

$$F_i(A) = \bigcup_{f \in F_i} f(A).$$

Обозначим $s_{i,r} = Lip(f_{i,r})$ для $r = 1, 2, \dots, n_i$. Коэффициенты сжатия F_i в $(H(X), h)$ равны $L_{F_i} = \max_{r=1, 2, \dots, n_i} s_{i,r} \equiv s_i$.

Традиционная теория СИФ рассматривает аттрактор, а именно множество, которое является «неподвижной точкой» отображения F . В теории ПСФ рассматриваются траектории отображений $\{F_i\}, i \in N$, которые могут быть прямыми и обратными:

$$\Phi_k(A) = F_k \circ F_{k-1} \circ \dots \circ F_1(A), \quad (18)$$

$$\Psi_k(A) = F_1 \circ F_2 \circ \dots \circ F_k(A), k \in N. \quad (19)$$

Отметим, что $H(X)$, снабженное метрикой Хаусдорфа h , является полным метрическим пространством, если (X, d) является полным. Для анализа свойств кубосикстера (и его вариантов) будет использоваться

Теорема 3. (Сходимость прямых траекторий ПСФ [10]).

Рассмотрим SFS с одинаковым числом отображений $n_i = n$ на каждом шаге

$$\begin{aligned} F_i &= \{X; f_{i,r}\}, \\ r &= 1, 2, 3, \dots, n, \\ i &\in N, \end{aligned}$$

где $f_{i,r} : X \rightarrow X$ — липшицевы отображения. Предположим, что соответствующие факторы сжатия $\{L_{F_i}\}$ для многозначных отображений $\{F_i\}$ на $(H(X), h)$ удовлетворяют условию

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^k L_{F_i} = 0.$$

и пусть $F = \{X; f_r, r = 1, 2, \dots, n\}$. Предположим, что $\exists C \subseteq X$, компактная инвариантная область для $\{f_{i,r}\}$ и что для каждого $r = 1, 2, \dots, n_i$ последовательность равномерно сходится к f_r на C при $i \rightarrow \infty$. Также предположим, что F имеет коэффициент сжатия $L_f < 1$. Тогда прямые траектории (18) $\{\Phi_k(A)\}$ сходятся для любого начального множества $A \subseteq C$ к единственному аттрактору F .

Результаты исследования

Последовательности систем итерированных функций для кубофракталов. Для множества кубосикстера последовательность систем итерированных функций имеет вид

$$F_n = \{[0, 1]; f_{n,1}(x) = a_{n-1}x/a_n, f_{n,2}(x) = 1 - f_{n,1}(x)\}. \tag{20}$$

Константы Липшица равны $L_{F_n} = Lip(f_{n,r}) = \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2^{n-2} - 1}{n \cdot 2^{n-2} + 1} \right) \leq \frac{1}{2}$ и, следовательно, удовлетворяют

условиям сходимости прямых траекторий, отрезок $[0, 1]$ является компактной инвариантной областью для отображений $f_{n,r}$, которые равномерно сходятся к $f_1(x) = x/2$, $f_2(x) = 1 - f_1(x)$. Таким образом, все условия сходимости выполнены, а значит существует единственное множество, являющееся аттрактором. Причем, согласно утверждению $A_F = f_1(A_F) \cup f_2(A_F)$, так как отрезок $[0, 1]$ удовлетворяет этому условию, $f_1([0, 1]) \cup f_2([0, 1]) = [0, 1]$, то $A_F = [0, 1]$.

Тот факт, что аттрактор A_F для множества кубосикстера имеет меру 1, не является противоречием с найденным ранее в (10) нулевым пределом мер итераций $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(K_n) = 0$. Дело в том, что предел $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n$ нужно рассматривать на пространстве $H([0, 1])$ компактных подмножеств отрезка. Поточечный же предел K_n даст открытое, всюду плотное множество, замыкание которого как раз и воспроизведет аттрактор A_F . Так как $A_F = [0, 1]$, размерность Хаусдорфа кубосикстера равна 1. Действительно, два предельных отображения имеют коэффициент масштабирования $1/2$:

$$2 \left(\frac{1}{2} \right)^d = 1,$$

откуда $d = 1$. Для ковры кубосикстера $d = 2$, а для кубосикстера $d = 3$.

Таким образом, кубосикстер реализует пограничную ситуацию для кубофракталов — это простейшая структура, которую можно собрать из кубов и пространственных крестов, которая в пределе имеет коэффициентом масштабирования $1/2$, что приводит к размерности 3, однако объем итераций стремится к нулю. Именно это различие между «поточечной» сходимостью итераций и сходимостью в метрике Хаусдорфа мотивирует дальнейшее изучение того, как будут изменяться физические свойства систем, генерируемых на конечных итерациях кубосикстера.

Для произвольного кубофрактала, чье одномерное ненормированное множество задается последовательностью a_n и отображениями (13)–(14) последовательность систем итерированных функций примет вид:

$$F_n = \left\{ \begin{aligned} &[0, 1]; f_{n,1}(x) = a_{n-1}x/a_n, \\ &f_{n,j}(x) = \frac{1}{a_n} \left(a_{n-1}(x + j - 1) + \sum_{m=1}^{j-1} \delta_{n,m} \right), \\ &j = 2, \dots, R_n. \end{aligned} \right\}$$

В условиях теоремы 3 число отображений на каждом шаге одинаково, то есть $R_n = R$.

Константы Липшица определяются скоростью роста последовательности a_n :

$$L_{F_n} = Lip(f_{n,j}) = \frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

В случаях, когда теорема 3 гарантирует существование аттрактора нестационарной системы итерированных функций, предел

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{1}{R} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\Delta_{n-1}}{a_n} \right) = \alpha < 1 \tag{21}$$

определяет коэффициент масштабирования системы итерированных функций, к которым сходится нестационарная система. В таком случае размерность Хаусдорфа аттрактора будет определяться стандартным соотношением

$$R(\alpha)^d = 1. \quad (22)$$

Нетривиальная фрактальная структура аттрактора, заключающаяся в том, что он будет самоподобным с дробной размерностью, будет возникать только если $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\Delta_{n-1}}{a_n} \right) < 1$, то есть доля соединительных отрезков должна расти со скоростью, сравнимой с ростом линейных размеров фигур. Приведем пример такой генерирующей последовательности (1), (2):

$$a_{n+1} = 3a_n + \Delta_n, R = 3, \Delta_n = 2a_n - 4, a_2 = 9, \delta_1 = \delta_2 = a_n - 2. \quad (23)$$

Первые 2 итерации соответствующего кубофрактала представлены на рис. 6.

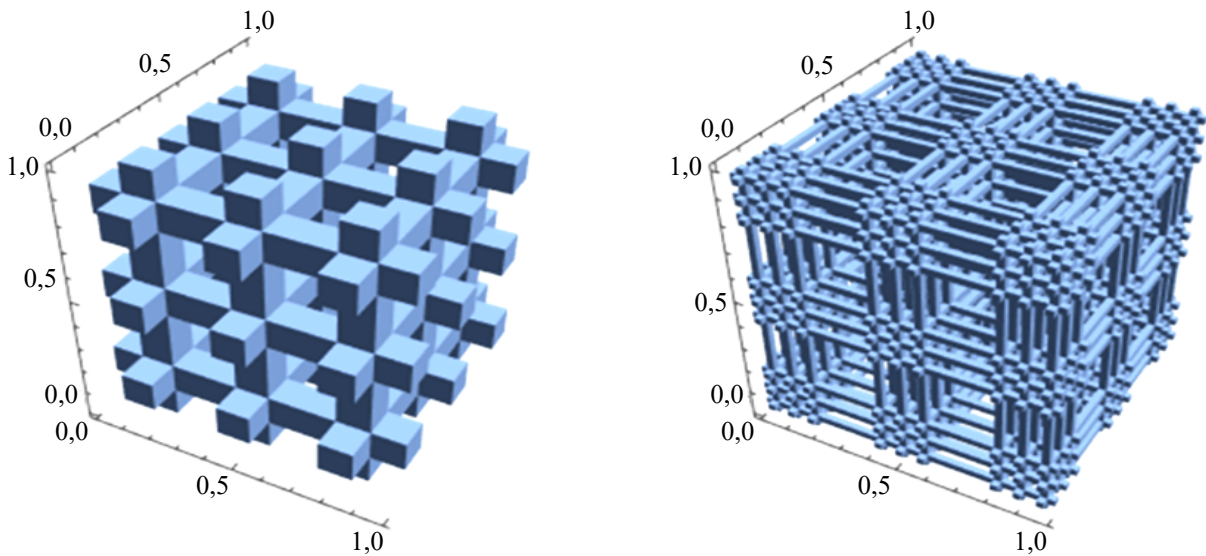


Рис. 6. Итерации кубофрактала, определенное последовательностью (23)

В явном виде можно выразить последовательность (19) как $a_{n+1} = 1 + 8 \cdot 5^{n-1}$, что дает предел (19) $\alpha = 1/5$ и размерность Хаусдорфа (22) $d = \frac{\ln 3}{\ln 5}$. Аттрактором, в данном случае, будет канторово множество, получаемое удалением второй и четвертой от 1/5 части оставшихся отрезков на каждой итерации.

Как и было отмечено в [10], в условиях теоремы 3 нестационарные системы итерированных функций не приводят к новым аттракторам, по сравнению с неподвижными точками классических систем итерированных функций.

Теорема 4. (Сходимость обратных траекторий ПСФ [10]).

Рассмотрим ПСФ (возможно с переменным числом отображений n_i на каждом шаге)

$$F_i = \{X; f_{i,r}, r = 1, 2, \dots, n_i\}, i \in N,$$

где $f_{i,r} : X \rightarrow X$ — липшицевы отображения. Предположим, что соответствующие факторы сжатия $\{L_{F_i}\}$ для многозначных отображений $\{F_i\}$ на $(H(X), h)$ удовлетворяют условию

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^k L_{F_i} = 0.$$

Предположим, что $\exists C \subseteq X$, компактная инвариантная область для $f_{i,r}$ и сходится сумма

$$\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^k L_{F_i} < \infty. \quad (24)$$

Тогда обратные траектории (19), $\{\Psi_k(A)\}$, сходятся для любого начального множества $A \subseteq C$ к единственному аттрактору $P \subseteq C$.

Для последовательности кубосикстера сумму (24) можно оценить сходящейся геометрической прогрессией со знаменателем $1/2$, то есть имеет смысл рассматривать обратную последовательность нестационарных итерированных функций. Интересно, что в случае кубосикстера, предел прямой последовательности дает отрезок $[0,1]$. Это позволяет приближенно исследовать обратные траектории

$$\Psi_k(A) = F_1 \circ F_2 \circ \dots \circ F_k(A)$$

ПСФ кубосикстера следующим образом. Зададим некоторую точность приближения функций ε и рассмотрим такой номер k , что F_{k+1} не отличается от $F = \{f_1(x) = x/2, f_2(x) = 1 - f_1(x)\}$ в рамках выбранного приближения. Тогда

$$\Psi_{k+n}(A) \approx F_1 \circ F_2 \circ \dots \circ F_k \circ F^n(A).$$

В свою очередь $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(A) = [0,1]$, то есть

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_{k+n}(A) \approx F_1 \circ F_2 \circ \dots \circ F_k([0,1]).$$

Множество P по своему построению не является самоподобным, и вычислить его хаусдорфову размерность, используя соотношение типа (22), не представляется возможным. Приближения множества P построены на рис. 7.

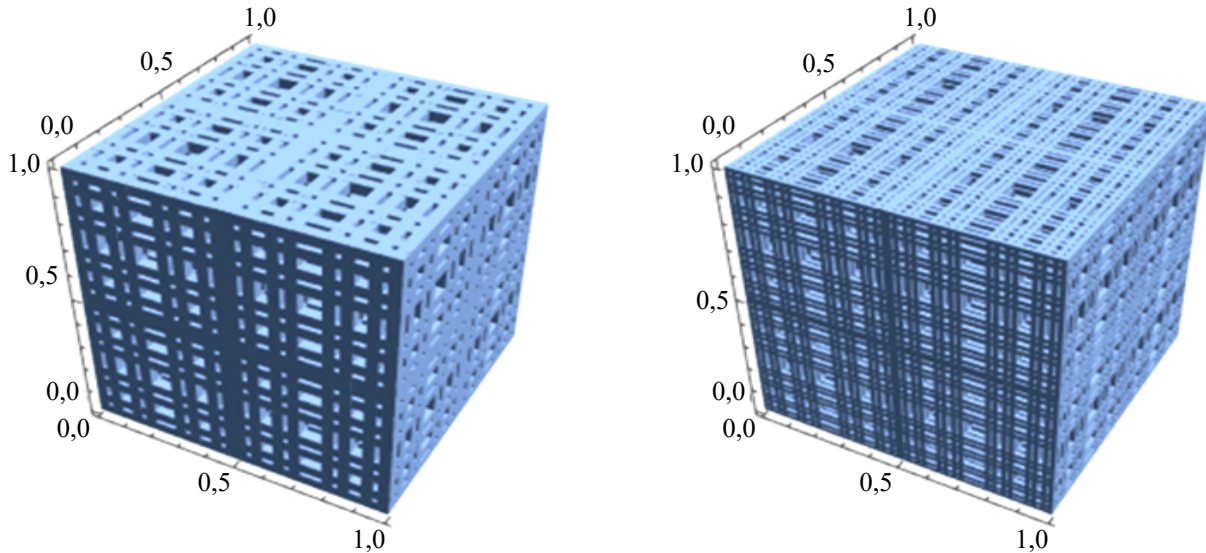


Рис. 7. Множества $F_1 \circ F_2 \circ \dots \circ F_k([0,1])$ для $k = 5, 6$

Обсуждение. Предложен итеративный геометро-комбинаторный подход к конструированию фракталов с кубической симметрией — кубофракталов. Построение фигур, начиная с простых дискретных базовых элементов (куб, пространственный крест, поликубы) по иерархическому принципу необходимо для конструирования конкретных материальных реализаций. Несмотря на логическую простоту конструкции, авторам не удалось воспроизвести предложенные кубофракталы с помощью L -систем, а использование систем итерированных функций потребовало одномерной редукции и нестационарной модификации. Математическая теория нестационарных систем итерированных функций позволила определить предельные множества для кубофракталов как аттракторы прямых траекторий оператора Барнсли-Хатчинсона.

Заключение. Для двух базовых примеров кубофракталов с последовательностями $a_n = n \cdot 2^{n-1} + 2, n > 0$ (кубосикстер) и $a_n = 1 + 8 \cdot 5^{n-2}, n > 1$ авторами вычислены фрактальные размерности, равные 1 и $\frac{\ln 3}{\ln 5}$ соответственно.

Доказано, что выбирая последовательность a_{n+1} с заданной скоростью роста и ее разбиение на Ra_n и Δ_n , можно управлять мерой итераций и хаусдорфовой размерностью предела.

Таким образом, кубофракталы могут стать удобным подходом к генерации фрактальных структур. Интересно, что предельное множество кубосикстера есть просто отрезок $[0,1]$, в то время как мера конечных итераций, которые приближаются к отрезку в смысле метрики Хаусдорфа, стремится к нулю. Можно предположить, что и другие физические свойства итераций (масса, прочность, пористость и т. д.) будут различаться в поточечном пределе и в пределе в смысле метрики Хаусдорфа. В связи с этим именно предфракталы для кубосикстера представляют исследовательский интерес в приложениях.

Другая альтернатива связана с рассмотрением обратных траекторий, предложенных в [10]. Известны условия, необходимые для существования аттрактора обратной траектории, которые, по-видимому, не являются самоподобными, однако задача изучения структуры получающихся множеств является весьма трудной. В этой связи кубосикстер может быть интересным кандидатом с тривиальным прямым аттрактором и нетривиальным обратным аттрактором, для которого, однако, можно построить хорошие приближения.

Список литературы / References

1. Falconer K. *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*. John Wiley & Sons; 2013.
2. Mandelbrot B.B. *The fractal geometry of nature*. New York: WH Freeman; 1982.

3. Ristanovic D., Losa G.A. A contribution to definitions of some fractal concepts. *The Fractal Laboratory Journal*. 2013;2(2):1–99.
4. Ghanbarian-Alavijeh B., Millán H., Huang G. A review of fractal, prefractal and pore-solid-fractal models for parameterizing the soil water retention curve. *Canadian Journal of Soil Science*. 2011;91(1):1–4. <https://doi.org/10.4141/cjss10008>
5. Wallace G.Q., Lagugné-Labarthe F. Advancements in fractal plasmonics: structures, optical properties, and applications. *Analyst*. 2019;144(1):13–30. <https://doi.org/10.1039/C8AN01667D>
6. Rozenberg G., Salomaa A. *The mathematical theory of L systems*. Academic press; 1980.
7. Hutchinson J.E. Fractals and self similarity. *Indiana University Mathematics Journal*. 1981;30(5):713–747.
8. Lunnon, W. F. Symmetry of cubical and general polyominoes. In *Graph Theory and Computing*. Academic Press; 1972.
9. Fisher Y. Fractal image compression. *Fractals*. 1994;2(03):347–361.
10. Levin D., Dyn N., Veedu V.P. Non-stationary versions of fixed-point theory, with applications to fractals and subdivision. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*. 2019;21(1):26. <https://doi.org/10.1007/s11784-019-0659-1>

Об авторах:

Евгений Викторович Кравченко, независимый исследователь, [ORCID](#), ekraftman@yandex.ru

Андрей Михайлович Пупасов-Максимов, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математики федерального университета Жуис-ди-Фора (Бразилия, Минас Жерайс, г. Жуис-ди-Фора), [ORCID](#), [SPIN-код](#), pupasov.maksimov@ufjf.br

Матвей Александрович Мерзликін, независимый исследователь, [ORCID](#), merzlikinmatvey01@gmail.com

Заявленный вклад авторов:

Е.В. Кравченко: формулирование основной концепции исследования; осуществление научно-исследовательского процесса, включая проведение вычислительных экспериментов; создание и подготовка рукописи: визуализация результатов исследования и полученных данных; оформление графических материалов.

А.М. Пупасов-Максимов: применение математических и вычислительных методов для анализа и синтеза данных исследования; написание программного кода и реализация вспомогательных алгоритмов; создание и подготовка рукописи: оформление научной статьи, работа с источниками.

М.А. Мерзликін: применение математических и вычислительных методов для анализа данных исследования; создание и подготовка рукописи; написание черновика рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Evgenii V. Kravchenko, independent researcher, [ORCID](#), ekraftman@yandex.ru

Andrey M. Pupasov-Maksimov, Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Associate professor of the Departamento de Matemática, Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF, Brasil, Via Local, 880 – São Pedro, Juiz de Fora, MG – 36036-900), [ORCID](#), [SPIN-code](#), pupasov.maksimov@ufjf.br

Matvei A. Merzlikin, independent researcher, [ORCID](#), merzlikinmatvey01@gmail.com

Contributions of the authors:

E.V. Kravchenko: ideas; conducting a research and investigation process; preparation, creation of the published work, specifically visualization; making graphic materials.

A.M. Pupasov-Maksimov: application of mathematical and computational techniques to analyse and synthesize study data; implementation of the computer code and supporting algorithms; preparation of the published work.

M.A. Merzlikin: application of mathematical and computational techniques to analyse study data; preparation of the published work; writing the initial draft.

Conflict of Interest Statement: the authors declare no conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 12.01.2026

Поступила после рецензирования / Reviewed 16.02.2026

Принята к публикации / Accepted 16.03.2026